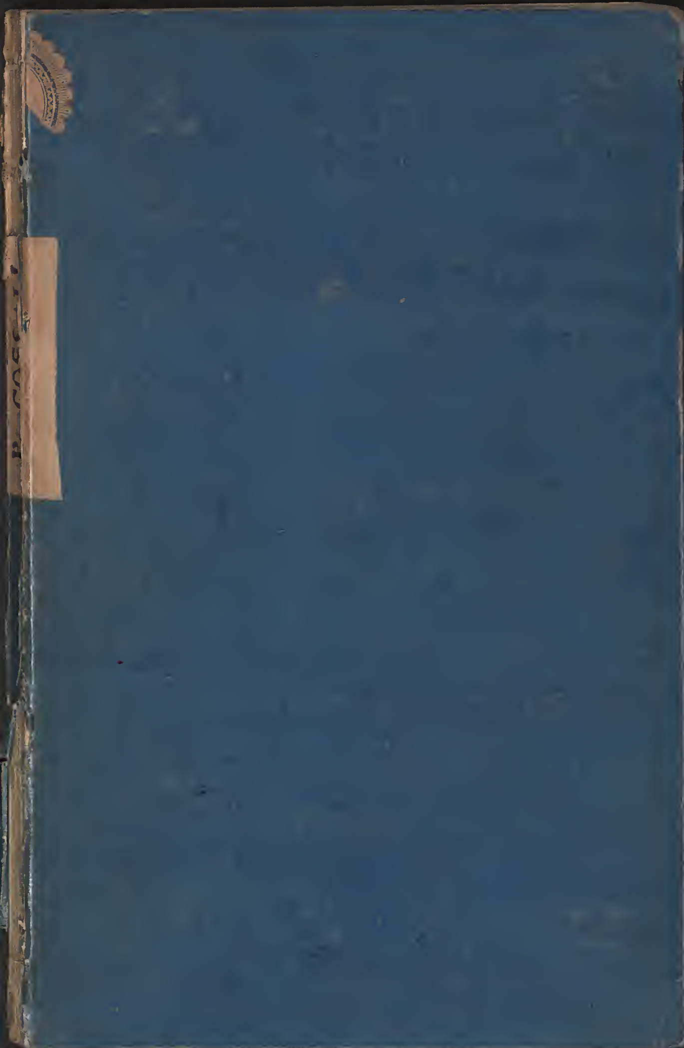



REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
Plana. IV. 1

ELOGIO

DI

LUIGI LAGRANGE





PADOVA
TIPOGRAFIA BETTONI
MDCCCXIII

ELOGIO

DI LUIGI LAGRANGE

RECITATO NELL'AULA MAGNA

DELLA REGIA UNIVERSITA' DI PADOVA

LI XV GIUGNO DELL'ANNO MDCCCXIII

DALL'ABATE PIETRO COSSALI

PROFESSORE DI CALCOLO SUBLIME

E MEMBRO PENSIONARIO

DEL REALE ISTITUTO ITALIANO

A SUA ALTEZZA IMPERIALE

EUGENIO NAPOLEONE

VICE-RE D'ITALIA

PRINCIPE DI VENEZIA

EC. EC.

Io vi offro A.I. l'Elogio del Lagrange. Ed a chi meglio si conviene la dedica delle laudi di un cospicuo italiano, che nella Francia, e tra i vortici medesimi più turbolenti colse nello stabilimento di una larga pensione il frutto de' suoi studj, e della sua celebrità, che ad un Principe

Francese, ed Italiano insieme qual Voi siete? Francese, attesa la preclara famiglia, onde aveste i natali; Italiano atteso l'affetto conceputo per gli italiani cui dal Massimo de' Monarchi foste destinato a reggere. L'Elogio mio dunque presenta al vostro cuore due grate soddisfazioni ad un tempo: l'una di mirare nel Lagrange un esimio genio onore di quella nazione che tanto amate; l'altra di vedere la nazione vostra propria costante in riconoscere il merito dei sommi uomini di qualunque regione essi si sieno. L'essere stato inoltre il La-

grange de' più insigni gradi condecorato da quel NAPOLEONE medesimo, che Voi sollevò alla dignità di suo adottivo figlio, deve aggiungersi a rendervi dolci i suoi encomj, compiacendovi della comune fonte, da cui sì splendidi, e sì varj raggi di munificenza emanarono, e vanno ognora emanando. Finalmente essendo sì grande l'affinità tra un Genio Matematico, ed un Genio Militare, non può non riuscire dilettevole la laudazione di un Genio Matematico, quale fu il Lagrange, ad un Genio Militare, qual Voi vi dimostrate. Così, come il

soggetto, riesca a Voi gradevole il mio dire. Su di esso invoco la vostra benignità, mentre colla più profonda venerazione mi professo

Di Vostra Altezza Imperiale

Umiliss. Divotiss. Obbligatiss. Servitore
Pietro Cossali.

ESORDIO

Quella natura, che nel fisico mondo offre strani fenomeni, che incantano l'occhio, e si furano all'intelletto; quella, che negli spazi celesti di tempo in tempo conduce al cospetto luminosi corpi, che si traggono dietro, a forma di code, lunghissime, ed ampissime colonne di luce, le quali a se sollevano stupidi gli sguardi, e delle quali la filosofia non ha peranche potuto decidere l'origine, e la natura; quella che nella nostra atmosfera presenta di tratto in tratto lo scenico spettacolo di boreale aurora, che variando di momento in momento di forma, agitandosi, ed ondeggiando tiene attonita la pupilla, e curioso il pensamento; quella, che sulla faccia della terra e sul mare dà a vedere il portento della calamita, che, come a centro, al polo tende, e intorno ad esso oscilla allontanandosene via via quinci, e quindi ad occidente, ed oriente

con un lunghissimo periodo sino ad ora alle fisiche specolazioni nascosto o soltanto particolarmente intravveduto; quella, che tra le macchine dell'umano ingegno nella Pila dal nostro italiano Volta inventata ci mostra la prodigiosa forza di fare alla testa recisa di un capretto raggrinzar le narici, e sbattere le orecchie, e nel corpo dal capo diviso scuotere, e stendere le gambe, e di più la sorprendente virtù di sciogliere facilmente ne' due suoi componenti l'acqua, senza che a ciò valga, almeno assai difficilmente, il gagliardo vigore di una macchina elettrica, per lo che resta ignota la possente modificazione, che l'elettrico fluido nella Pila acquista: quella natura stessa nella sfera delle umane intelligenze crea, e produce alcuni genj così straordinarj, che ci ricolmano di maraviglia, ed i cui innalzamenti ci è appena possibile di comprendere. Nè l'opera della natura consiste in fabbricare nel capo di tali eccelsi uomini organi speciali, che a singolari intraprese li rendano determinati; mà bensì in tesserne i corpi di fibre delicatissime, ed in congiugnere ad essi spiriti di massima forza di astrarre, e di ragionare forniti, ammettendo anche

gli spiriti sebbene essere semplici, diversità di forze loro proprie. Sì fatti genj in ogni età riportarono il nome di divini, e quinci il divino Omero, il divino Platone, il divino Dante, il divino Galileo, il divino Newton, il divino Leibnitz. Nè difficil è giustificare l'appellazione, essendo ogni spirito umano della divina ragione partecipe, ed a minore intervallo da essa alzandosi codesti genj mirabili. E siccome, falsa essendo nel mondo fisico la già pretesa continua catena degli esseri, passando tra un essere e l'altro differenza finita, pure vi è una certa gradazione; così nelle intelligenze, quantunque non vi sia una scala matematicamente continua, pure vi ha un progresso per cui via via si elevano a maggiore partecipazione della intelligenza suprema. Scrisse il Sig. D'Alembert sembrargli, che da trecento anni la natura abbia destinato il mezzo di ciascun secolo ad essere l'epoca di una rivoluzione dello spirito umano: ciò che porterebbe di conseguenza, che dal principio alla metà di ciascun secolo nascesse qualche grande genio di rivoluzione nello umano spirito operatore. Se l'idea non fosse rispetto alle scienze fisiche e matema-

tiche contraddetta dalla nascita del Galileo l'anno 1564, parerebbe da quella del Newton l'anno 1642, e da quella del Leibnitz l'anno 1646 favorita, e si potrebbe dire confermata da quella del Lagrange l'anno 1736. Sì questo insigne genio operò nell'Analisi pura, e nella Meccanica Analitica una grande innovazione, ed io mi propongo dimostrarvelo l'Anailsta il più Metafisico, ed il più eccellente Fabbricatore della Meccanica Analitica. Se mai ho stimato sproporzionate al soggetto le mie forze, egli è questa volta certamente. E con quali penne seguire i voli di aquila a sì grandi e forti ale, che ben merita il nome di aquila reale, di augel celeste? Avrò io a rendere storia la favola d'Icaro? pazienza: mi giustificherà presso di voi, che giusti siete e benigni la difficoltà ed il breve tempo di poco più d'un mese concedutomi al lavoro.

PUNTO PRIMO

Da una famiglia originaria di Parigi vantante una Maria Luigia già Dama di adornamento della Regina madre di Luigi XIV, di poi sposa di Francesco Gastone secondo figlio d'Ippolito di Bethune, ma famiglia fatta italiana coll' essere a Torino trasportata da un bisavo capitano di cavalleria, uomo di talento, e perciò nel 1672 in commissioni importanti, e scabrose impiegato da Emanuele II, e da lui ammogliato con una Dama Conti di cospicua prosapia romana, trasse il giorno 25 di gennajo dell'anno 1736 di Giuseppe Luigi tesoriere della guerra maritato con Maria Teresa Gros figlia unica di un facoltoso medico di Cambiano i natali suoi Luigi Lagrange. In tenera età mostrò per le belle lettere natura e propensione; ma di proposito dedicatosi alle matematiche ivi dispiegò rapidamente il suo genio di modo che

l'anno 1755, cioè il dicianovesimo dell'età sua, fu dal suo Re creato Professore di artiglieria. Ma ciò che deve più sorprendere, si è, che sino da quei verdi anni si fece egli di quattro sublimi analitiche dottrine inventore, ed all'analitico orbe maestro, onde parve quale gigante, che spiegando il nerbo delle sue forze si ponesse a correr la via. La prima si è la scoperta del terzo criterio al massimo, ed al minimo di una funzione a due variabili comune, emendando così la svista di quell'Eulero, che teneva allora tra gli analisti lo scettro. Segue a secondo suo ritrovato analitico l'integrazione di una equazione a differenze finite col secondo membro variabile, ed il riducimento ad essa della teoria delle serie ricorrenti, cosa utilissima nei problemi intorno all'azzardo. Assai più grande, e propriamente eccelso si è il terzo discoprimento della rigorosa dimostrazione del bisogno di ammettere in analisi, ed in geometria, oltre le funzioni regolari continue esprimenti curve algebriche, o trascendenti con certa regola, e certa legge di continuità descritte, le funzioni altresì irregolari e discontinue, relative a curve composte di li-

nee rette con angoli congiunte, o di tratti di curve a salto variate, e con libero corso di mano tracciate. Fiera pugna ardeva fra il D'Alembert, l'Eulero, Daniello Bernoulli sulla curva di una corda vibrantesi. Il D'Alembert co' suoi calcoli era giunto a dedurre, che la curva iniziale non doveva ristrignersi alla cicloide, come aveva preteso il Taylor, ma poteva essere una curva qualunque algebraica, e trascendente espressa da una equazione. L'Eulero seguendo presso a poco gli stessi calcoli, ne aveva inferito, che la figura data al principio ad una corda, e da essa seguita nell' oscillare poteva altresì essere una curva irregolare, e discontinua espressa da una irregolare e discontinua funzione. Al che si opponeva il D' Alembert, riflettendo, che i calcoli appoggiavansi su di una equazione differenziale integrata, e che impossibil era, che una equazione rappresentasse una curva, od una funzione irregolare e discontinua. Daniello Bernoulli sforzato si era di sostenere la cicloide Tayloriana, siccome bastante a rappresentare la vibrazione di una corda, e mescolandone molte di lunghezze in date ragioni insieme, e divisa quinci la

corda in più ventri, spiegava con le oscillazioni della corda intera, e dei ventri ad un tempo, il tuono principale, ed i suoni armonici contemporanei. Ecco tra queste quistioni, che tengono discordi ed inquieti i primi analitici genj apparire garzone (dal poetico Ercole, che nella culla con tenere, ma possenti mani strozzò i serpenti, non lontano) che in biondo pelo colla virtù di novissimo gagliardissimo calcolo le soffoca. Egli è il Lagrange, che prendendo a considerare indefiniti punti separatamente l'uno dall' altro, formando l' equazione del moto di ciascheduno, indi sommando le equazioni tutte, e con magistrale finezza maneggiando la somma, arriva a dimostrare aver ragione contro l'Eulero il D'Alembert in contrastare, che in una equazione differenziale, o nella sua integrazione possa contenersi una curva irregolare, e discontinua; aver ragione contro il D'Alembert l'Eulero nella ardita, e sublime sua idea delle curve irregolari, e discontinue nelle corde vibrantisi, e solo avere errato nel metodo del calcolo; riuscir giusta la spiegazione del Bernoulli intorno agli armonici suoni per la divisione della corda in

più ventri, qualora il calcolo ristringasi ad un numero finito di punti; ma sparire la spiegazione quando da un numero finito di punti si passi, come vuole la considerazione di una corda, all' infinito. Spinto venne alla quarta invenzione da una confessione dell'Eulero nell' esimia, e veramente originale sua opera. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio Problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti.* Il sublime autore ad onta dell' ingegnoso, e fecondissimo suo metodo è costretto a prorompere: *desideratur itaque methodus a resolutione geometrica et lineari libera.* Il ritrovamento pertanto di un tal metodo puramente analitico è l'impresa del giovane Lagrange, e lo ritrova col variare in due differenti maniere le medesime quantità, onde sale a determinare li massimi, e minimi delle formole integrali indefinite, e ad applicare il calcolo a problemi bellissimi, e difficilissimi, quale è quello di assegnare tra le infinite curve tra due curve date quella, per cui un corpo dalla quiete partente, o già in moto, discenderà nel più breve tempo. E quantunque il nuovo metodo non

sia uscito alla luce, che nel volume II di Torino intitolato *Mélanges de la Société Royale:* pure si sa per sua asserzione nel vol. IV di certo, che sin dall' anno 1755 comunicollo egli all'Eulero, che lo denominò calcolo *delle variazioni*, d'onde si deduce, che avanti l'età di anni 19 giunse l'autore ad escogitarlo; e se vale l'ordine della impressione è mestieri dedurre, che le tre altre invenzioni pubblicate nel vol. I portante in fronte *Miscellanea Societatis privatæ Taurinensis* (e consisteva la Società privata nel Saluzzo, nel Lagrange, nel Cigna) sieno stati frutti di una età tanto più acerba, quanto principalmente l' operosissimo calcolo del teorema delle funzioni discontinue richiedeva più di tempo. Questi furono pertanto i primi aurei raggi vibrati dal novello sole sorgente sull' orizzonte analitico, e tanta fu la stima e l'ammirazione, che ne concepirono il D'Alembert, e l' Eulero, sebbene da lui nell'amor proprio offesi, che con esso introdussero amichevole carteggio; ed il primo cioè il D'Alembert dal Gran Federico addomandato per l'Accademia sua di Berlino, non potendo accettare la reale offerta, propose

in suo luogo il Lagrange, il quale dopo iterati impulsi finalmente ad una lettera, che lo sollecitava a portarsi al servigio del più grande Re, che a quei giorni signoreggiasse sulla terra, ottenne dal nativo Re suo la graziosa licenza di recarsi a Berlino, dove arrivato li 2 ottobre 1766 fu subito, superati, per il supremo merito, tutti i riguardi, costituito, come lo era già l' Eulero, direttore della Classe Matematica; ed il secondo, l'Eulero io dico, oltre ad averlo fatto ascrivere, mentre intorno alle labbra gli spuntava fresca lanugine, all' Accademia di Berlino, con lettera dei 2 ottobre 1759 gli scrisse *Analitica tua solutio Problematis isoperimetrici continet, ut video, quidquid in hac materia desiderari potest, et ego maxime gaudeo, hoc argumentum, quod fere solus post primos conatus tractaveram, a te potissimum ad summum perfectionis fastigium esse erectum. Rei dignitas me excitavit, ut tuis luminibus adjutus solutionem analiticam conscripserim, quam autem celare statui, donec ipse tuas meditationes publici juris feceris, ne ullam partem gloriæ tibi debitæ præripiam:* aurea lettera, e ben de-

gna dell'uomo grande, che la vergò, essendo l'uomo grande, e che molto possiede, ben lontano dalla gelosia, dall'invidia, dal rancore per una perdita, dall' usurpo di qualunque gloria. Di fatto diede egli nel tomo X dei nuovi commentarj di Pietroburgo impresso l'anno 1766 due memorie assai estese sul calcolo delle variazioni, nelle quali con tutto calore, e tutta lucidezza ne spiega li principj, e gli usi, e lo stesso fece poi nel volume III del suo calcolo integrale pubblicato l'anno 1770: dove però tra la chiarezza, e solidità delle dimostrazioni, una, tra il cumulo delle mie illustrazioni sulle opere dell'Eulero, ne trovo notata di paralogismo, ed è la dimostrazione, che la variazione di un differenziale, è eguale al differenziale di una variazione, e doveva essere paralogismo una tale dimostrazione, come lo sono tutte quelle dei principj evidenti, quale con la sua metafisica aveva brevemente accennato il Lagrange essere l'addotto principio per l'indipendenza del differenziale, e della variazione. Ecco pertanto il celebratissimo Eulero tenente il magistero di analisi in Europa divenuto commentatore, e diffonditore di un

metodo analitico inventato da un giovane, quando sul mento gli fioriva la prima barba. Vero è però che l'Eulero avendo più accuratamente perscrutata l'indole del calcolo delle variazioni giunse a riconoscere, che con leggiero cambiamento poteva ridursi a quella parte di calcolo integrale, che versa sulle equazioni a differenze parziali, e ne compiè la riduzione nel tomo XVI di Pietroburgo, e nel tomo IV del calcolo integrale; ed è pur vero che il nostro italiano Frisi, per considerazioni affatto sue, assoggettò i problemi del calcolo delle variazioni al semplice calcolo differenziale, errando però, come le mie annotazioni mi dimostrano, nello scioglimento di qualche problema. Ma è altresì vero che condotto di queste guise il calcolo delle variazioni sotto il dominio del calcolo differenziale fu dal suo genitore liberato dalla schiavitudine tenebrosa degli infinitesimi, ed elevato al calcolo delle funzioni, a non formare in un colla dottrina dei massimi e dei minimi ordinarj, che una continuazione dell'analisi finita. Proseguendo a scorrere per i tomi delle Miscellanee di Torino quai nuovi raggi di sublime analisi

del Lagrange! Nel III tomo industriosissime, e laboriosissime integrazioni di una o due equazioni del tutto nuove e strane a due, o tre variabili, lineari di qualunque ordine, non lineari di qualsivoglia grado e di ordine 2.°, a coefficienti costanti, moltiplicati successivamente con le potenze di una minuta quantità, variabili, comprendenti seni e coseni di varianti archi, con il secondo membro nullo, o variabile: integrazioni, che fecero la maraviglia e la delizia del D'Alembert, ed in taluna delle quali si compiacque di esercitare, ed esperimentare egli stesso il proprio ingegno e la propria industria. Nel IV la soluzione del famoso problema di aritmetica sublime, chiave di tutti gli altri simili dal francese Fermat proposto a forma di sfida a tutti i geometri inglesi, e del quale Wallis è stato, per ciò che si sa, il solo ad intraprendere lo scioglimento, ma a tastone, e non dimostrando tampoco la possibilità generale: cioè dato un numero intero non quadrato qualunque trovare un altro, numero intiero, e quadrato, tale, che il prodotto di questo e del dato aumentato di una unità riesca un numero quadrato; inoltre la integrazione di

quelle equazioni differenziali, che contengono le variabili separate, ma pure i loro membri con strano paradosso resistono ciascuno singolarmente alla loro integrazione, quantunque in complesso una algebrica relazione comprendano. Nel V il gettarsi nel bujo delle probabilità, e cogli scioglimenti di dieci astrusi problemi, quasi con altrettanti dardi di luce, diradare, anzi dissipare le tenebre rispetto ai vantaggi del metodo di prendere il mezzo tra li risultamenti di varie osservazioni, determinando con precisione, secondo i varj casi, la probabilità di ottenere un risultamento esatto, la probabilità che l'errore non sorpasserà che una data frazione, o che sarà contenuto fra dati limiti. Chi non ammirerà l'arduità dei problemi, la fecondità dei metodi, la sagacità dei calcoli, la solidità delle dimostrazioni, la lucidezza dello stile? Sono i lavori del Lagrange giojelli della massima ricchezza, e dell'arte più fina, nei quali brillano le gemme più preziose mirabilmente disposte, ed elegantemente a pieno giorno legate. Accompagniamo l'esimio genio a Berlino, e vediamo come successore al sommo Eulero nella direzione della classe di Matematica spanda la

luce sua sopra gli articoli dal grandissimo uomo trattati, o sopra gli oscuri paradossi da lui proposti. Ha l'Eulero in due eccellenti Memorie nel tomo VI degli antichi, e nel tomo IX dei nuovi Commentarj dell'Accademia di Pietroburgo inserite, esercitato il suo ingegno sullo scioglimento dei Problemi indeterminati del 2.° grado, supponendo, che debbano essere numeri interi i due elevati al quadrato, positivo il numero determinato moltiplicante uno di questi quadrati, e numero primo quello, che a questo prodotto unito si uguaglia al quadrato dell'altro numero? e prescrive alcune regole per conoscere *a priori*, come si suol dire, se il problema sia o no risolubile? e nota una delle risoluzioni insegna a dedurne infinite altre? Il Lagrange dimostra tali regole fondate su principj precari, e tirati solamente per induzione; e rimovendo tutti questi supposti sviluppa il problema con metodi quanto nuovi, altrettanto diretti e generali, e trovato di poi mezzo di semplificar questi metodi, gli estende a gradi superiori. Eulero riduce la dimostrazione del teorema, che a Bacheto sembrò in più luoghi da Diofanto supporsi, che ogni

numero intero non quadrato può risolversi in due, od in tre, od in quattro quadrati a dimostrarsi, che se la somma di quattro quadrati sarà divisibile per la somma di quattro altri quadrati, il quoziente non solamente in numeri interi, ma eziandio in rotti sarà la somma di quattro quadrati, e confessa di essersi affaticato invano per ritrovare questa dimostrazione? Il Lagrange la trova, non solo per la somma di quattro quadrati dividitrice della somma di quattro altri quadrati, ma generalmente per un numero qualunque primo divisore di un numero qualsivoglia composto di quattro, o di un numero minore di quadrati, senza esserlo di ciascuno dei quadrati in particolare. Esamina, e dimostra Eulero alcuni teoremi su i numeri espressi da certe forme di secondo grado, e ne espone senza dimostrazione altri tirati per sola induzione? Il Lagrange si volge nelle sue ricerche aritmetiche a sviluppare a fondo in modo diretto generale, ed *a priori* la materia, e dare il metodo di rinvenire le differenti forme dei divisori, che tali sorta di numeri ammettono, di ridurle al minor numero possibile, a stenderne le tavole, e farne veder l'uso, a dimo-

strare i teoremi intorno gli stessi numeri conosciuti, ed altri interamente novelli. Con lo sviluppo del principio, onde Fermat dimostrò, che la differenza di due numeri quadrato-quadrati non può essere giammai un quadrato, vanta l' Eulero di avere altri analoghi teoremi dimostrati, e tra questi, che la somma di un quadrato-quadrato, e del doppio di un altro quadrato-quadrato non può essere un quadrato? Il Lagrange osserva essere all' incontro possibile che la differenza tra il doppio di un quadrato-quadrato, ed un altro quadrato-quadrato sia un quadrato, ed a questa uguaglianza richiama il problema siccome difficilissimo proposto dal Fermat di trovare un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa sia un quadrato, e la somma dei due lati lo sia parimenti, indaga egli, e rinviene la determinazione con il principio del Fermat non rinvenibile dei più piccoli numeri soddisfacenti al problema, d'onde ad altri più grandi salire si può. Gode in somma l' Eulero la lode di essersi fatto novello industrioso cultore di quel ramo di analisi, che indeterminata si chiama, e che dal greco Diofanto trattata fu altresì dal nostro Leonardo

Fibonacci Pisano dall' Arabia in Italia trasferita, indi da alcuni autori accresciuta, ma da qualche tempo abbandonata? Il Lagrange con le sue sottilissime viste, con i suoi ingegnosissimi artificj, colle sue dirette dimostrazioni aumenta in tal ramo la copia, la ricchezza dei frutti. Che più? Propone l'Eulero nella sua Memoria inserita tra quelle dell'Accademia di Berlino per l'anno 1756 due sorprendenti paradossi analitici: l'uno di certe equazioni differenziali di 1.° ordine, chè all'integrazione si prestano addotte al 2.° ordine; l'altro che si danno equazioni finite soddisfacenti ad equazioni differenziali di 1.° ordine senza essere comprese nei loro integrali completi, e ciò accadere nelle equazioni differenziali al primo paradosso soggette? e quantunque di poi nel capo 4 della sezione II del tom. I del suo calcolo integrale stampato l'anno 1768 dia alcune regole per distinguere quando una certa equazione finita possa aversi per integrale particolare contenuto nel completo, e quando no, nulla però sapendo escogitare della nascita di tali equazioni finite in quella del completo integrale non comprese, segue a predicarle un

insigne paradosso da niuno, per quanto gli sembra, avanti di lui osservato? Il Lagrange dissipa ambedue i paradossi. Dissipa il primo, producendo la classe delle equazioni differenziali, di cui dall'Eulero furono soltanto addotti alcuni esempj, e dimostrando come con ulteriore differenziazione si scompongano in due equazioni, l'una delle quali integrata somministra l'integrale completo, l'altra parimenti integrata porge l'equazione in esso non compresa, e che da lui denominasi soluzione singolare. Dissipa il secondo paradosso penetrando a fondo nella natura, e montando all' origine di tali singolari soluzioni; scoprendo in generale, che per qualunque equazione di qual ordine si sia nascon esse variando l'integrale completo soltanto relativamente alla costante, e ponendo uguale al nulla la variazione, indi introducendo nell'integrale completo il risultamento di tale uguaglianza; progredendo quinci ad insegnare come sconosciuto eziandio l'integrale completo arrivare si possa in varie maniere a conoscere la singolare soluzione, anzi di questa ancora la soluzione singolare, e così via via; ma delle varie maniere la migliore essere quella di

ulteriormente differenziare l'equazione; spingendosi poscia alla stupenda geometrica dottrina, che rappresentando l'integrale completo una infinita famiglia di curve, la soluzione singolare rappresenta la curva che nasce dalla continua loro intersecazione, e che tutte le abbraccia; stendendo quindi alle equazioni a differenze parziali la industria analitica, e la teoria geometrica con sostituire quivi alle curve le curve superficie; finalmente accingendosi ad applicare i nuovi lumi ad illustrare nuove quistioni sulle sviluppate, sulle cicloidali, su i differenti ordini di contatto, sulla maniera di trovare le curve, che abbiano con una infinità di curve date i contatti di un ordine dato, sulle superficie composte di linee di una natura data. Non si è dunque il Lagrange in metafisica di analisi elevato sopra l'Eulero, il creatore fecondo di dottrine in tutte le parti della matematica? E non è palese essere il Lagrange un grande astro dalla provvidenza destinato ad illuminare le analitiche carte? Che dirò io ora della sua Memoria sulla eliminazione delle incognite dalle equazioni? Anche qui dopo i conati del Bezout, e del Cramer, dopo i doppi

sforzi del medesimo Eulero si accigne, e felicemente riesce a dare un nuovo metodo, che abbia i vantaggi di formole generali, e semplicissime. Così fossero della massima semplicità possibile le dimostrazioni, e senza il difetto di un prodotto la equazione finale: nei, cui io mi sono adoperato di rimediare nella mia storia dell' Algebra; ma sì fatti rimedj non possono spargere alcuna nebbia intorno alla gloria di un sì grand' uomo, e saranno al più al più il tallone di Achille, che sua madre Teti non avvertì d' immergere nelle onde di Stige. Tornerà però utile l' averli notati ad avvertimento, ed a fuga dell'accusa di un esagerante, ed entusiasta lodatore. Che accennerò della sua Memoria su di un nuovo elegantissimo teorema su i numeri primi additato dal Waring, ed al Wilson attribuito? Se non che egli è il primo a produrne con la analitica maestria la dimostrazione, ed a legarlo in una formola con altro di Fermat più volte dimostrato dall' Eulero. Che soggiugnerò delle sue soluzioni analitiche di alcuni problemi sulle piramidi triangolari? quali ingegnosissimi calcoli, e quanto bei problemi, come quello: date le quattro faccie determi-

nare la piramide di massimo corpo; come quello di assegnare nell'interno della piramide un punto, dal quale tirate ai quattro angoli quattro rette, la medesima piramide sia divisa in quattro piramidi aventi tra loro rapporti dati. E passerò sotto silenzio le sue due Memorie sulla integrazione delle equazioni a differenze parziali del 1.º ordine? Ma come se dopo gli artificj di Eulero inventore, e del D'Alembert promotore, egli ne diede l'artificio più semplice, e più esteso, abbracciando un caso, che aveva delusa la sagacità degli analisti, il caso generale, che le variabili sieno in qualunque numero; e se di più ampliando il celebrè problema di Giovanni Bernoulli di assegnare la curva, che tagli sotto un angolo dato una infinita famiglia di altre curve, lo trasferì egli ad una superficie, che sotto angolo dato tagli una famiglia infinita di altre superficie? Ommetterò di parlare della sua Memoria sull'uso delle frazioni continue nel calcolo integrale? lo impediscono i vantaggi di questo metodo, perchè libero dell' inconveniente delle altre serie di proseguire all'infinito, anche allor quando le quantità cercate pos-

sono essere rappresentate per espressioni razionali e finite, conducendo esso direttamente e con sicurezza al valore razionale e finito, qualora vi ha; e perchè idoneo ad assoggettare alla integrazione molte equazioni differenziali, che si sottraggono ad altri metodi; e me lo impedisce insieme il nuovo ingegnoso artificio analitico di cui è arricchito, differente dal geometrico del Taylor, e dal meccanico dello Stirling, per determinare l'esponente della primaria variabile, che ne renda la più piccola potenza almeno in due termini dell'equazione sussistente. Tralascierò di far menzione delle due sue Memorie, la prima recante in fronte il titolo di metodo particolare di approssimazione ed interpolazione, la seconda quello di metodo d'interpolazione? Ma la prima risuscita, e generalizza, e adduce a formola il metodo del Briggs in calcolare i logaritmi, e termina in dare il binomio composto dell'unità e di qualunque quantità elevato a qualsivoglia esponente in una serie ordinata per le potenze ascendenti del medesimo esponente; e nella seconda è il Lagrange benemerito di dedurre dagli stessi principj e la formola

differenziale comunemente nelle interpolazioni usata dal Newton, e la risoluzione del problema attinente di Mouton astronomo di Lione; di estendere gli stessi principj a porgere le differenze di tutti gli ordini di una serie, nella quale non si prendessero i termini, che a due a due, a tre a tre e così via via; di ampliarli ad interpolare le serie doppie, triple, ed indefinitamente multiple. Riterrò la lingua sulla sua Memoria intorno ad una quistione concernente le annuità, nella quale supposto, che un padre voglia assicurare a' suoi figli una rendita annuale pagabile soltanto dopo la sua morte, e sino a che il più giovane de' figli sia giunto ad una certa età, si chiede, che si determini la somma, che esso padre deve attualmente pagare per acquistare ai figli la detta rendita, l'età del padre, il numero de' figli, le età loro essendo cose date? Non lo mi permette la bellezza della quistione, la sua difficoltà, massimamente se trasformata, ed estesa a casi più complicati, e l'ingegno, col quale la risoluzione viene ridotta al calcolo delle annuità ordinarie, in un colle tavole utili in varie occasioni. Trasvolerò il suo saggio di

analisi numerica sopra la trasformazione delle frazioni? Ma non è un deliziosissimo quadro quello, in cui si mirano approssimate, e presentate sotto un medesimo punto di vista la teoria, in un sistema qualunque di numerazione, delle frazioni decimali; la teoria di una specie di frazioni poco conosciute, che il Lambert propose il primo, e godono il vantaggio singolare di formare certe serie più di qualunque geometrica serie convergenti, la teoria delle frazioni continue trattata sempre per l'addietro isolatamente? Maggiori parole da me richiede la Memoria su di una novella specie di calcolo relativo alla differenziazione, ed alla integrazione delle quantità variabili. Come balenan ivi i primi lampi della nuova metafisica delle funzioni primitive, e derivate? di quale utilità si presenta ad una funzione composta di qualunque numero di variabili generalmente estesa la bellissima idea del Leibnitz dell'analogia tra le differenze finite, e le potenze positive di un binomio, e tra le finite somme, e le potenze negative? Di qual dolce meraviglia riesce il vincolo tra le finite, e le infinitamente piccole differenze, tra le somme delle

prime, e le integrazioni delle seconde, in modo di determinare reciprocamente le une per le altre? quanto risulta preziosa la nuova generale espressione dei numeri coefficienti dei termini degli sviluppi di una differenza, o somma finita ricavati solamente per induzione dall'Eulero? quali vantaggi indi si producono nel computare le aje delle curve per le somme, e le differenze delle ordinate equidistanti a confronto dei metodi di Cotes, e di Stirling? e nell'assegnare il termine generale delle serie, la loro somma, la interpolazione loro in tutta la università possibile? Non si fosse l'eccelso genio arrestato all'argomento d'induzione nel passaggio dalla differenza finita di 1.° ordine alla differenza in generale di qualunque ordine, e nel passaggio da questa alla somma finita, dichiarando forse difficilissima una dimostrazione analitica diretta: quanto più bella sarebbe stata la sua teoria! Sarà ciò riservato ad altro genio di sfera altissima irritato dall'ommissione: così, e coll'accendersi altri lumi dai lumi di un grande genio progrediscono le scienze. Nè debbo trascorrer oltre senza intertenermi un poco sulla sua Memo-

ria intorno alle serie ricorrenti, i cui termini variano in più differenti maniere, e conseguentemente intorno alla integrazione delle equazioni lineari a differenze parziali, e sull'uso di esse nella teoria degli azzardi. Oh! qui si è dove a fronte di due eccellenti Memorie sull'argomento anticipatamente prodotte dal primo inclito genio della Francia, dal La-Place spiega la forza del suo metafisico genio il Lagrange, sviluppando il soggetto in una maniera più diretta, più semplice, sopratutto più generale, cominciando dalla integrazione delle equazioni lineari a differenze finite di due variabili, alla quale riducesi il calcolo delle serie ricorrenti semplici; proseguendo con dare alcuni nuovi metodi per la integrazione delle equazioni lineari a differenze finite, e parziali, ed a coefficienti costanti, e così al calcolo integrale richiamando le serie ricorrenti in più maniere varianti; e ciò che è oltre ogni meraviglia, sottomettendo all'analisi i più complicati, ed astrusi problemi della sorte. Avesse egli tenuto quivi il suo costume, rigorosamente dimostrando le formole per il caso delle radici uguali! Ma avvertito dopo l'impressione della Me-

moria, e confessato il trascorso vi supplì con altra nuova Memoria sulla espressione del termine generale delle serie ricorrenti, allorchè l'equazione generatrice contiene alcune radici uguali. E torto farei alla sua Memoria sopra un nuovo metodo di calcolo integrale per li differenziali contenenti un radicale quadrato, sotto il quale la variabile monta al quarto grado, se non osservassi la sua esattezza in declinare dalla semplice sostituzione da altro grande analista adoperata, atteso che, non assicura, che la nuova variabile non sia immaginaria, condizione per verità non necessaria, allorchè si tratta d'integrazioni assolute, e perfette, ma indispensabile nelle integrazioni approssimate, non potendosi della convergenza della serie giudicare, a meno che tutti i termini non sieno reali, ed in numeri valutati; se non lodassi la finezza dei suoi ripieghi per risolvere la funzione di quarto grado posta sotto il radicale in due binomi di secondo aventi a primo termine l'unità; e dopo avere accennato che la irrazionalità sparisce, allorchè i due coefficienti dei quadrati della variabile nei due binomi sono uguali, e che non vi resta che la ir-

razionalità relativa alla quadratura del cerchio, o della iperbola, se uno di essi coefficienti si annulli, la sua sottilissima industria in condurre, e ravvicinare tutti gli altri casi a questi due; ed il suo magistero di poi in tradurre la sua dottrina alla rettificazione della elissi, e dell' iperbola, applicandola primieramente in nuova maniera, e semplice ai due casi estremi della eccentricità piccolissima, e pochissimo dall'unità differente; e quindi trasferendo il metodo generale al rettificamento di una elissi, od iperbola qualunque con adoperare da prima le trasformazioni, che accrescono la disuguaglianza dei fattori sotto il segno radicale, indi quelle che la diminuiscono. Lecito non mi è tampoco il tragittare a fior d'acqua, e senza singolare encomio la sua Dissertazione delle soluzioni di alcuni problemi relativi ai triangoli sferici con una analisi completa dei triangoli medesimi, siccome quella, nella quale avendo primieramente dimostrato, che il costante rapporto dei lati, e dei seni degli angoli opposti in un triangolo qualunque rettilineo si può esprimere per i tre lati, e si trova uguale al diametro del circolo cir-

coscritto, od al prodotto dei tre lati diviso per il doppio dell'aja di esso triangolo, ricerca se similmente il rapporto costante tra i seni dei lati, ed i seni degli angoli opposti in un triangolo sferico si possa esprimere dipendentemente dai lati, dal raggio del cerchio circoscritto, e dall'area dello stesso triangolo sferico, e scopre tali espressioni; e di più quella dell'aja del triangolo rettilineo formato dalle corde; e quella della solidità della piramide formata da esse corde, e dai tre raggi della sfera, e quella vantaggiosissima per misurare le superficie sferiche terminate per archi di grandi cerchi, e perciò molto addatta ad assegnare la estensione di un paese, conoscendo le latitudini e le differenze delle longitudini di più punti collocati nel suo ambito, con legarli in un poligono sferico, del quale si troverà facilmente l' aja, risolvendolo in quadrilateri formati per cerchi di latitudine, e per archi di equatore intercetti fra questi cerchj. Parimenti quella della solidità di qualunque piramide per i suoi lati, e gli angoli solidi per essi formati, espressione comodissima per determinare la solidità di qualunque corpo da piani ter-

minato, risolvendolo in piramidi triangolari, siccome si risolve ogni poligono in triangoli; e quella generale dell'arco perpendicolare sulla data base di un triangolo sferico, di cui sieno noti i lati. Procede poscia a dare la teoria piena dei triangoli sferici, fondandola, a differenza di Eulero, che su di tre equazioni la fondò, su di una equazione sola, consistendo la perfezione dell'analisi in adoperare il minore numero possibile di principj, e derivarne per forza dell' analisi tutte le verità, che possono rinchiudere; quando per l'opposto la sintesi geometrica consiste in dimostrare isolatamente ciascun teorema coll'ajuto de' precedenti; ed a differenza del Gua di Malves, che su di una equazione sola pure fondolla, ma con calcoli sì complicati, che sembrano più atti a mostrarne l'inconveniente, che a guadagnare favore, fondandola egli all' incontro su di una sola equazione con semplicissime trasformazioni condotta a presentare in quattro equazioni le soluzioni tutte dei triangoli sferici, e tutte per la via comoda dei soli logaritmi. E finisce con paragonare i triangoli sferici ai rettilinei, e principalmente un triangolo sferico

tracciato sulla superficie di una sfera di grandissimo diametro ad un triangolo rettilineo i cui lati sieno della medesima lunghezza, che quelli del triangolo sferico, dimostrando colle sue formole potersi lo sferico trattare come il rettilineo, qualora a questo si dieno angoli uguali a quelli dello sferico diminuiti ciascuno del terzo dell'eccesso della somma dei tre angoli dello sferico sopra due retti: teorema bellissimo dovuto al Legendre, da lui proposto senza dimostrazione tra le Memorie dell'Accademia di Parigi 1787, ma in seguito da lui stesso in differente modo dimostrato: teorema utilissimo nel calcolo dei triangoli sulla faccia della terra formati per misurare un arco del meridiano. È ben altro il piacere che alla schiera di tali egregie analitiche invenzioni prova l'intelletto di un amatore di analisi, che quello che l'occhio sente in un giardino di eletti vario-colorati fiori con vago ordine disposti, di straniere leggiadre, od altere piante con bella simmetria ripartite, di viali altri coperti, altri aprici in giusta proporzione distesi; e ben altra è la meraviglia, dalla quale lo spirito resta compreso, che quella, che destano i

castelli delle incantatrici maghe finte dai poeti. Discenda già l'alto genio ad un soggetto più basso, ma fondamentale di tutta l'analisi, e supposto eziandio dall'analisi sublime, allo scioglimento delle equazioni finite. Prende egli di fatto a meditare su di esso, e distingue le equazioni numeriche, e le letterali. Sulla risoluzione delle equazioni numeriche tutto è suo ciò che produce, se pur suo negar non si vuole ciò, che primo egli non inventò, ma ignorò che fosse da altri inventato, come egli stesso nella nota 3 del suo Trattato ci fa sapere essere accaduto della equazione delle differenze tra le radici della equazione proposta, escogitata cinqne anni prima dal Waring, con la osservazione inoltre, che se tale equazione non ha che segni alternanti, l'equazione primitiva, o data ha tutte le sue radici reali. Del resto tutto senza contraddizione è suo. Sua la dimostrazione rigorosa del teorema, che se due numeri sostituiti in una equazione danno risultamenti di segno contrario, vi ha nell' equazione necessariamente una radice reale del valore tra i due numeri. Sua la dimostrazione esatta dell' altro teorema, che se in una equazione fornita di una,

o più radici reali e disuguali si sostituiscano all'incognita due numeri uno più grande, l'altro più piccolo, che una di tali radici, e tra loro nel tempo stesso differenti di una quantità minore, che la differenza tra essa radice, e ciascheduna delle altre radici reali, le due sostituzioni daranno necessariamente due risultamenti di contrario segno. Sua la dimostrazion universale della equazione delle differenze tra le radici dell'equazione data; e sua la deduzione delle condizioni generali ne' segni, onde l'equazione data abbia una o più radici positive disuguali, e delle condizioni, onde contenga radici uguali, con il metodo di cavarne due equazioni, l'una che contenga tutte le radici disuguali, l'altra che comprenda il complesso delle eguali, ma ciascuna una sola volta. Suo l'inferire che in una equazione qualunque non può essere il numero delle radici immaginarie maggiore che il doppio delle successioni de' segni nell'equazione delle differenze; e sue le regole per determinarne in certi casi il preciso numero. Suo il cangiamento da indursi nella stessa equazione delle differenze a dimostrare, che allora quando tutte le sue radici reali

negative sono disuguali la proposta avrà necessariamente altrettante coppie di radici immaginarie, ma se tra le radici reali negative della equazione delle differenze ve ne ha di uguali, ciascun pajo di queste potrà dare due paja di radici immaginarie nella proposta, ma potrà ancora non darne alcuna. Suo il metodo di determinare le quantità componenti le radici immaginarie. Suo il riunire sotto una elegantissima teoria le differenti dottrine di Hudde sopra l'uguaglianza delle radici di una proposta equazione, di Rolle su i limiti delle radici delle equazioni da essa dedotte, di Gua de Malves su i caratteri della realità delle radici, con la bella considerazione, che ogni equazione, a cui manchi, o siasi fatto sparire qualche termine ha radici immaginarie, se i termini di qua di là vicini al termine mancante, o scomparso abbiano il medesimo segno. Suo l'artificio di ogni altro migliore per conoscere i più ristretti limiti di una radice reale positiva. Sua l'applicazione delle frazioni continue all'approssimamento più semplice, e maggiore possibile al valore delle radici irrazionali. Che se piglia ad esaminare il metodo di approssima-

zione del Newton, suo si è l'averlo sublimato conducendolo alla sua nuova teoria delle funzioni derivate, e l'averne tutto insieme discoperto il difetto, che l'uso di esso allora soltanto è sicuro, che il valore approssimato è ad un tempo più grande, o più piccolo, che ciascheduna delle radici reali dell'equazione data, o ciascheduna delle parti reali delle radici immaginarie. Se assoggetta alla sua bilancia il metodo tirato dalle serie ricorrenti, suo si è l'incontrarsi tra via in dimostrare più semplicemente la legge dal Newton assegnata per la somma delle potenze delle radici, e l'altra legge della somma delle potenze reciproche; il discoprire che il metodo riuscirà difettoso, quando tra le radici immaginarie ve ne saranno di quelle, nelle quali il prodotto reale delle corrispondentisi sarà maggiore del quadrato delle radici reali; il rilevare, che la indeterminazione dei primi termini nel metodo di Bernoulli, dall'Eulero esposto nella sua *introduzione* anzi che un vantaggio, è un inconveniente; finalmente il dimostrare, e conchiudere che a qualunque metodo di serie ricorrenti è preferibile il suo. Se si assume di estimare il prezzo del me-

todo del De-Fontaine, consistente in estendere le tavole di tutti i sistemi di fattori di una equazione, e delle condizioni per distinguere il sistema conveniente; estimazione, che ommisero il D'Alembert nella Enciclopedia, ed il Condorcet nella storia dell'Accademia per gli anni 1771, 1772, contentandosi ambidue di gettare alcuni dubbj; suo è il provare con esempj, ed *a priori* che non è sempre possibile di trovare le condizioni che distinguano ciascuno sistema di fattori da tutti gli altri, non considerando nelle quantità indeterminate componenti i fattori altri rapporti, che quelli di uguaglianza, e disuguaglianza, secondo la teoria di Fontaine; e che quando ciò fosse possibile, l'operazione diverrebbe immensa per le equazioni sopra il 4.° grado, e non sarebbe punto utile per la risoluzione numerica delle equazioni, primieramente perchè l'equazione tra due delle quantità indeterminate dei fattori, eliminate le altre tutte, ascenderebbe, generalmente parlando, più alto, che l'equazione proposta; in secondo luogo perchè l'ipotesi inchiusa nel metodo di Fontaine, che la sostituzione in essa equazione dei numeri 1, 2, 3 ec. possa dare due

risultamenti di segno contrario non ha luogo, che allora quando la equazione ha le sue radici positive, la cui minore differenza sia più grande dell' unità: il provare in somma che molte sono dell'autore le cadute: chiarissimo esempio, che gli uomini anche sapienti si abbagliano, e cadono e precipitano con tanto maggior impeto, quanto da più alto è il precipizio loro. Se incaricasi di una esposizione succinta delle differenti ricerche su di una dimostrazione rigorosa, che le radici immaginarie di una qualunque equazione si riducono ad una stessa forma, suo si è, dopo avere riflettuto, che poco naturale trovasi l'impiego ad una tale dimostrazione introdotto dal D'Alembert del calcolo differenziale, come all'incontro naturalmente vi si presenta l'uso delle funzioni derivate; dopo avere dilucidata qualunque nuvola lasciasse la dimostrazione dallo stesso D'Alembert dedotta da una curva, rendendola più soddisfacente, più semplice, ed applicabile a qualunque equazione comprendente eziandio funzioni logaritmiche, e circolari, e conducente insieme al bel teorema, che nel passaggio di una radice da reale ad immaginaria diventa dupla, quadrupla, e così

via via; dopo aver osservato, che ciònulladimeno la dimostrazione è indiretta, e lascia desiderarne una diretta, e tirata dai principj della cosa, per conseguenza consistente in provare che ogni equazione è sempre divisibile in fattori reali di primo o secondo grado; dopo avere quindi esposto i lavori di Le-Seur, di Eulero, di Foncenex, e le difficoltà a cui vanno soggetti; suo, io dicea, si è il dare egli stesso per mezzo de' suoi principj la desiderata dimostrazione, ed accoppiarvi insieme una dimostrazione più semplice del ritrovato primieramente di Alberto Girardo, poi del Newton, di esprimere per mezzo di funzioni dei coefficienti di una equazione le potenze delle sue radici, trasferito in seguito dall'Eulero, e dal Cramer all'espressione simile dei prodotti di esse radici prese a due a due, a tre a tre, e via via, e spinto a formòle generali dal Waring. Se egli piglia a rendere nota la utile trasformazione da lui scoperta di una qualunque equazione in un' altra, che abbia tutti i termini col medesimo segno, ma l' ultimo con segno contrario, suo si è il suggerire la sostituzione da farsi cavata dai due limiti di una radice, il

mostrarne l'effetto vario secondo i varj limiti, il conchiudere in fine sulla condizione dei limiti. Passando alle equazioni letterali quanti egregi parti del suo ingegno! Gli esami, le dimostrazioni *a priori*, le differenze, le scambievoli dipendenze dei metodi di Tartaglia, di Luigi Ferrari, di Des-Cartes, di Ischirnaus, di Eulero, di Bezout rispetto alle equazioni di 3.° e di 4.° grado; le equazioni ridotte in funzioni delle radici della proposta ricavate *a posteriori* dai metodi generali di Ischirnaus, di Eulero, di Bezout; le ridotte *a priori* con immenso numero di ricerche, e combinazioni tratte dalla natura stessa delle equazioni: e costituenti i veri principj della risoluzione loro. Male, che non avesse tempo di farne alle equazioni di 5.° grado l'applicazione; per il che ne lasciò dubbio il successo: dubbio però tolto da altro insigne italiano, dal Ruffini, che sulle traccie del Lagrange dirigendo i profondi suoi studj, è arrivato a dimostrarne impossibile il generale scioglimento: impossibilità di poi confermata dal Lagrange in un ristretto della sua teoria innestato nella 13.ª nota nella edizione novella del 1808 del suo Trattato della riso-

luzione delle equazioni numeriche a motivo di provare nella 14.ª come (senza le equazioni intermediarie con metodo quanto ingegnoso, altrettanto originale adoperate dal Gauss) si può colla sua teoria direttamente ottenere la risoluzione completa di qualunque equazione a due termini, il cui grado sia per un numero primo qualsivoglia espresso. Inoltre la sua dottrina generale sulle equazioni tra le radici, delle quali entrando qualche relazione, ammettono l'abbassamento a grado minore: cosa trattata dall'Hudde, e via via più estesamente da altri geometri, e massimamente dal Waring, ma sempre contenuta tra particolari speculazioni. Di più il suo novello metodo di risolvere le equazioni per mezzo delle serie, metodo ricolmo, anzi ridondante di vantaggi, come quello, che dà l'espressione non di una sola, ma di ciascuna delle radici, che le dà per serie regolari, cioè astrette ad una legge generale, e delle quali si può facilmente stabilire la forma dei generali termini, e dedurne le condizioni, che le rendano convergenti; come quello, che, oltre a porgere l'espressione di una qualunque radice, ne porge insieme quella di una funzione

qualunque, e come quello infine che si applica ugualmente alle equazioni trascendenti, che racchiudono i logaritmi, e gli archi di cerchio, o le quantità ad essi relative, e può in conseguenza valere a risolvere alcuni problemi importanti sfuggenti gli altri metodi. Ed in tutte queste opere quale penetrazione di viste? quale profondità di pensamenti, quale sottigliezza di quel discernimento, che negli obbietti discopre li principj generali, che nascondono, e che costituisce il vero genio nelle scienze. Ma già dal fondamentale soggetto dell'analisi risalendo il Lagrange sospingesi a volo più che mai sublime. Un genio mirabilmente metafisico accontenterassi del metodo degli infinitamente piccoli; che involgono l'oscura idea dell'infinito, e dove distinti varj ordini d'infinitamente piccoli a confronto di un ordine qualunque si trascurano quelli tutti degli ordini ulteriori? No, mai no certamente, essendo tale trascuramento alla esattezza analitica diametralmente contrario, nè valendo a giustificarlo, e farlo vedere innocente il rinvenire il risultamento inverso della integrazione a ciò che esce dal metodo geometrico degli antichi, conforme,

come si sono creduti in necessità di dimostrare fra gli altri il Riccati, ed il Saladini nelle loro istituzioni analitiche, potendo ciò essere effetto di un concorso di avverse supposizioni le une le altre correggentisi come il Boscovich, e di poi il Carnot hanno pensato, o, come a me piuttosto sembra, la conseguenza di una tacita convenzione reciproca. Appagherassi del metodo delle flussioni tratto dal moto ad ogni istante variato, concependo ad ogni istante la velocità potenziale del corpo in moto? Neppure, introducendo tal metodo in pura analisi un principio di Dinamica, ed in fondo comprendendo nell'istante un tempo infinitamente piccolo. Che farà dunque l'inventore genio del Lagrange? Concepisce egli l'ardita idea di schivare tali tenebre, di ridurre il calcolo sublime a congiungersi col calcolo finito, e ad esserne non altro, che una continuazione. A compiere questa idea, fissa il teorema dello sviluppo di una funzione di una variabile accresciuta o diminuita di un aumento, o diminuimento indeterminato o di una funzione a più variabili accresciuta, o diminuita ciascheduna di un aumento, o diminuimento singolare,

e slegato da quello di ogni altra, in una serie procedente per le potenze sempre maggiori degli aumenti o diminuimenti, od i prodotti loro. Questa serie sarà uguale alla funzione della variabile accresciuta dell' indeterminato aumento (basterà parlare di questo caso, essendo facile il trasferire il ragionamento agli altri); e trasportato al di là il primo termine, che è la funzione della variabile in se medesima, il residuo della serie rappresenterà tutta insieme la differenza totale, e finita tra la funzione della variabile accresciuta, e la funzione della variabile in se stessa; e ciascun coefficiente di una potenza dell'aumento divisa per il denominatore numerico sarà una derivata della funzione primitiva; e le derivate successive scaturiranno dalla antecedente con legge costante. Quinci con tre teoremi che assistono quello dello sviluppo si ha tutto il calcolo sublime sì diretto, che inverso, e la sua applicazione alla più alta geometria. Il primo teorema si è, che ogni derivata è caratteristicamente propria della sua primitiva, d'onde è immediatamente aperta la via alla discesa dalla primitiva funzione alla derivata, nel che consiste il calcolo differenziale, e la risalita da

questa alla primitiva, nel che sta riposto l'inverso calcolo integrale, senza che v'intervenga nel primo alcuna tenebria di trascuramento, nè del secondo alcun bisogno di geometrico confronto, o di concorrenza di supposizioni false contrarie, o di convenzione reciproca a dichiararne la giustezza. E ciò, che dicesi di una funzione primitiva, e della sua corrispondente derivata di una variabile, trasferiscasi alle funzioni primitiva, e derivata di più variabili, ed alle equazioni di loro composte, cogli artificj necessarj ne' casi più complicati. L'altro teorema si è, che un qualunque termine della serie dello sviluppo si può rendere maggiore della somma dei termini tutti seguenti, poichè essendo l'aumento indeterminato, ed innalzandosi le potenze di esso successivamente nei termini della serie, si possono il termine preso di mira, e tutti i seguenti, per la potenza dell'aumento, che quello contiene dividere, e quinci restando i termini susseguenti con potenze del medesimo moltiplicati, prenderlo sì piccolo che la detta maggioranza si avveri; e che quinci al caso di doversi annullare i termini antecedenti, la qualità o positiva, o negativa del-

la serie dipenda dal dato suo termine. E questo teorema dischiude varj ameni campi, e quello dei varj ordini di contatto tra curve e curve piane, tra curve, e curve a doppia curvatura, tra curve a doppia curvatura, e superficie, tra superficie, e superficie, e quello delle evolute, e quello degli assintoti; quello dei massimi, e minimi ordinarj; e quello dei massimi, e minimi alti; e quello dei flessi, e regressi; e quello delle soluzioni particolari. Il terzo teorema si è, che finte tre quantità la prima composta di due coefficienti delle potenze 1.ª e 2.ª dell'aumento indeterminato, la seconda similmente composta, ma di due coefficienti diversi la terza non contenente che il primo termine della prima, e posto che debbano essere dalla prima successivamente l'una dell'altra minore, a qualunque piccolezza l'aumento si abbassi, è giuoco forza, che sieno in tutte tre le quantità uguali i coefficienti della prima potenza dell'aumento. E da questo teorema con mirabile fecondità nascono le misure delle aje delle curve, dei compianamenti delle superficie, delle solidità dei corpi. E ben a torto opporrebbesi, che l'abbassare

l'aumento indeterminato alla piccolezza supposta nei due ultimi teoremi è un ricadere negli infinitamente piccoli; poichè la piccolezza, sebbene soventi grande, è solamente quanta fa di bisogno, onde il termine della serie eletto divenga maggiore della somma di tutti i seguenti con le potenze di tal piccolezza moltiplicati, ed onde si osservi tra le tre finte quantità l'ordine di minoranza supposto, e nulla più; e quinci sotto di tal piccolezza si possono concepire infinite altre piccolezze maggiori: dunque è una piccolezza ben lontana dall'idea degli infinitamente piccoli. Trionfi pertanto l'analitica dottrina delle funzioni primitive, e derivate, od almeno serva di analitica pietra di paragone, che manifesti senza bisogno di simile geometrica pietra, la correzione per avverse false supposizioni, o per tacita convenzione nascente, a ragione della quale ad onta dei trascuramenti risultano veri, ed esatti gli effetti del calcolo degli infinitamente piccoli. Nello scorrere per le opere analitiche del Lagrange io vi ho stesa sotto gli occhi quella immensa fascia, che taglia il cielo seminata di stelle, per il cui accumulato lume apparisce bianca, e che i

Poeti finsero essere la via de' numi al trono di Giove. Così avessi io avuto l'arte di armarvi nuovo Kerschel gli occhi, sicchè ne distingueste di ciascheduna singolarmente lo splendore! Ciò nondimeno credo che mi si farà da voi ragione, se un genio, che sino dalla più verde età recise con nuovi maravigliosi calcoli le quistioni tra i maggiori maestri della scienza analitica, che nella disamina delle dottrine su tutti i rami di essa, penetrando ivi, dove i più acuti sguardi non penetrarono, sostituì a precarie ipotesi, ed a dimostrazioni *a posteriori*, dimostrazioni *a priori*, che disperse paradossi, e fabbricò nuove teorie, che dissipando tenebre di vacillanti dottrine le ravvicinò e le legò a dottrine lucidissime, che ad ogni passo raccolse nuova messe di eleganti, e sublimi teoremi, se un genio sì fatto non merita il vanto di analista il più metafisico, come nel primo punto mi proposi di dimostrare? Ed egualmente vi dimostrerò che a lui si conviene la lode del più grande institutore della Meccanica Analitica.

PUNTO SECONDO

Nella Meccanica Analitica eziandio sino dagli albori della giovinezza sfolgoreggiò il Lagrange producendo nel I tomo delle Miscellanee di Torino le sue nuove ricerche sulla natura e propagazione del suono e diretto, e riflesso, e composto secondo l'esperienza del Tartini di due suoni, e renduto per le fibre dell'aria, e per le corde sonore e per i flauti; e nel tomo II l'aggiunta a queste ricerche, e le ricerche novelle sull'argomento, e l'applicazione del metodo delle variazioni allo scioglimento di differenti problemi i più ardui, e sublimi della Dinamica: del movimento di un sistema di corpi sollecitati da qualunque forze centrali, e reciprocamente attraentisi; del moto di un corpo spinto da quante forze più piace, e tirante per due fili due altri corpi; del movimento di un filo fisso in una estremità, e carico di quanti

corpi più aggrada; del movimento di un filo inestensibile, od estensibile, ed elastico agitato ne' suoi punti da qualunque numero di forze; del movimento di un corpo di figura qualunque animato da forze qualunque; del movimento dei fluidi non elastici, e degli elastici; nel III tomo gli scioglimenti di alcuni altri problemi concernenti il movimento de' fluidi; quello di una quistione appartenente alla teoria delle corde vibrantisi; la determinazione del movimento di un sistema qualunque di corpi agenti gli uni sopra gli altri, e facenti infinitamente piccole oscillazioni intorno al punto loro di equilibrio; l' iterata disquisizione sulle oscillazioni di un filo fermo in una delle sue estremità, e gravato di un numero qualunque di pesi, con l'applicazione alle corde sonore; la indagine del movimento di un corpo, che descrive un'orbita presso a poco circolare in virtù di una forza proporzionale ad una funzione qualunque della distanza, la teoria delle perturbazioni reciproche dei pianeti, Giove e Saturno; nel IV le ricerche sul movimento di un corpo attirato verso due centri fissi, prima supponendo l' attrazione in ragione quadrata

inversa delle distanze, secondariamente supponendola variante con diverse altre leggi; nel V una investigazione sulla figura delle colonne. E come raggiò nell' Accademia di Berlino con ben 29 Memorie di Meccanico argomento, e nell'Accademia di Parigi con 5 da essa premiate, e con altre 2 inserite tra i suoi Atti, e con 2 altre poste nei volumi recenti di Torino? Quanto poi rifulse nella prestantissima sua opera della Meccanica Analitica, dove raccolse, e sotto un solo principio compenetrò i lumi nelle sopra accennate Memorie sparsi? Di questo eccellentissimo lavoro uscì al pubblico giorno l'anno 1788 la prima edizione, e l'anno 1811 spuntò la seconda nel suo primo volume, ma ahi! che quale virgulto di altera pianta, che doveva immensamente stendere i suoi rami fu da morte troncata col rescindere il filo della vita dell' eccelso genio, che a suo dispetto sarà immortale. In tre volumi, a ciò, che fama narra, doveva essere la novella edizione, il secondo de' quali si dice essere stato dall' autore condotto a suo compimento, e di suo pugno restare scritto. E chi sarà l'uomo benemerito, che lo darà alla

luce? E chi seguendo con ali nerborute i voli del genio sublime di qua partito lavorerà il terzo? Intanto che fare? se non fingersi l'opera recata alla sua perfezione, trasferendo in essa, in qualunque maniera, le splendide dottrine nelle già citate Memorie diffuse!

Lo scopo, che il Lagrange si propone in questa sua insigne opera è del tutto singolare e sublimissimo, di ridurre cioè la teoria della Meccanica scienza, e l'arte di sciogliere i problemi ad essa appartenenti a formole generali, il semplice sviluppo delle quali porga le equazioni necessarie per la risoluzione di qualunque problema; e la divide in due parti, la statica, e la dinamica. Dopo pertanto un'ampia esposizione storico-critica su i tre fondamentali principj delle leggi dell'equilibrio, su i principj della leva, della composizione delle forze, e delle velocità virtuali: esposizione molto dilettosa per quelli, che amano di seguire il cammino dello spirito nelle scienze, e di conoscere i sentieri dagli inventori tenuti, e li più diretti che avrebbero potuto tenere; dopo la scelta del principio delle velocità virtuali, non già, co-

me egli stesso il Lagrange dichiara, nel giornale della scuola Politecnica fascetto quinto tomo II, e replica nella novella edizione della Meccanica Analitica, non già quale principio veramente primitivo, non avendone tutta la evidenza, ma come una espressione semplicissima, generalissima, ed adattatissima ad essere in universale formola tradotta delle leggi dell'equilibrio, naturalmente assistita, e come da fondamento sostenuta dal principio per se stesso evidente delle girelle l'una immobile, le altre mobili; dopo tutto ciò procede a piantare la equazione generale dell'equilibrio di qualunque sia numero di punti in qualsivoglia sistema cioè ordine, o legamento fra loro, e da qualunque numero o diversità di forze interiori, od esteriori animati, conducendo a distruggersi reciprocamente fra loro i momenti, o sia i prodotti delle forze colle velocità virtuali, o sia con i minimi spazi da percorrersi da ciaschedu-no, supposto per un momento tolto l'equilibrio. Indi riferiti i punti ed i centri delle forze a tre assi ortogonali, quinci ad un raggio vettore con duè angoli, e per le equazioni di condizione tratte dalla natura del

sistema diminuito il numero delle variabili, e rendute le residue indipendenti, eccolo dividere in parziali equilibri l'equilibrio generale. Ma rotto l'equilibrio il sistema si moverebbe, ed il moto si potrebbe riguardare come di tre composto, l'uno di traslazione a tutti i punti comune, il secondo di un movimento di rotazione, il terzo di movimenti relativi. Tutti debbono essere impediti dall'equilibrio. I relativi dipendenti dalla particolare disposizione dei corpi tra loro richiederanno ad essere impediti condizioni particolari al sistema; li movimenti di traslazione comune, e di rotazione possono essere indipendenti dalla forma del sistema, ed eseguirsi senza che la disposizione, ed il vincolo de' corpi sia sconcertato. Si vegga pertanto come dall'equazione generale dell'equilibrio scaturiscano questi impedimenti. Egli il dimostra con artificj quanto fini altrettanto semplici, che lo conducono direttamente a conoscere le leggi dell'equilibrio di più forze applicate ad un sistema di punti di forma invariabile; a rilevare il canone statico, che nell'equilibrio di un sistema libero la somma delle potenze estimate a seconda dei tre assi orto-

gonali debbe esser nulla rapporto a ciascheduno dei tre assi; ad inferire il teorema che i momenti delle forze rapporto ad un asse debbono distruggersi, onde vi abbia equilibrio intorno ad esso; a determinare oltre la già nota proprietà del centro di gravità dipendente dalle distanze delle masse da un dato piano, altra sconosciuta, ed elegantissima sorgente dalla mera posizione rispettiva de' corpi; a raccogliere dall'esame dei movimenti di rotazione intorno a differenti assi la seguente speciosa analogia, che la composizione e scomposizione dei movimenti di rotazione si fa nella stessa maniera, e con le medesime leggi, che la composizione e la scomposizione dei movimenti rettilinei, sostituendo ai movimenti di rotazione movimenti rettilinei nelle direzioni degli assi di rotazione. Più elegante apparisce l'equazione generale dell'equilibrio accresciuta dei differenziali delle equazioni provegnenti dalla forma particolare del sistema moltiplicate per altrettante quantità indeterminate, quali termini, ne' quali le quantità indeterminate rappresentino le forze, colle quali i punti agiscono gli uni sopra gli altri, ed i differenziali suddetti gli spa-

zietti significanti le velocità virtuali; onde ne segue una più facile eliminazione delle indeterminate, ed una più presta spartizione della equazione generale nelle equazioni determinanti l'equilibrio. E più mirabile eleganza pur anche acquista la stessa generale equazione dell'equilibrio, qualora le forze, o potenze sono funzioni delle distanze da' loro centri, che è il caso propriamente della natura, divenendo in tal caso equazione di massimo, o minimo con la maravigliosa differenza, che qualora l'integrale dell'equazione è un minimo, l'equilibrio ha stabilità, di maniera, che venendo il sistema da esso alcun poco smosso, tende da se medesimo a rimettervisi, facendo alcune oscillazioni infinitamente piccole, e via via minori; e che al contrario, essendo l'integrale un massimo l'equilibrio non avrà punto di stabilità, ed essendo una volta, per poco che sia, sconcertato, il sistema, facendo oscillazioni via via maggiori potrà giungere ad uno sconcerto totale. Si trasferisca l'equilibrio da un sistema di punti ad un sistema di corpi di massa finita, e dovendosi distinguere gli elementi de' corpi infinitamente poco tra loro lontani dagli

spazietti delle velocità virtuali, sarà mestieri adoperare due simboli differenti di variazione, l'uno per il passaggio da elemento ad elemento, l'altro per lo spazietto da descriversi con la velocità virtuale, e l'equazione dell'equilibrio si convertirà in una equazione di somma indefinita. Ma qui appunto è dove in tutto il suo lume pompeggia la bellezza della equazione dell'equilibrio, salendo a coincidere i problemi ad essa appartenenti con gli altissimi problemi dei massimi, e minimi degli integrali, indefiniti, soggetto del calcolo delle variazioni. Piantata così la generale teoria dell'equilibrio quale splendida schiera d'importantissimi, e finissimi problemi! Quello della composizione, e scomposizione delle forze applicate all'attrazione delle sferoidi ellittiche, e massimamente a quelle poco differenti da una sfera: problema assoggettato dal Maclaurin alla sintesi, ma che da taluni stimavasi sottrarsi alle forze dell'analisi, e sul quale il Lagrange fecela trionfare, dimostrando direttamente, e generalmente i teoremi di Maclaurin, determinando nella prima Memoria inserita tra quelle di Berlino per l'anno 1773 l'attrazione di una sferoide su di un

punto collocato nel suo interiore, o sulla sua superficie; ed in quella tra le Memorie per l'anno 1775 l'attrazione su di un punto situato sul prolungamento di uno dei tre assi; e nella terza tra quelle per l'anno 1793 dando bensì la lode di capi d'opera di analisi agli altri casi sciolti dal Legendre rispetto alle sferoidi di rivoluzione, ed ai più ampi dal La-Place e dal Legendre risoluti relativamente a sferoidi di qualunque sorta, sulla speranza però, che i giornalieri progressi dell'analisi sieno per portare ad una dimostrazione più diretta, e più semplice, presentando intanto alcune formole a ciò tendenti ed utili; e per ultimo nel quinto decimo quaderno del giornale Politecnico tomo VIII spiegando riguardo all'attrazione delle sferoidi poco differenti dalla sfera un paradosso di calcolo integrale per cui non è nullo il valore dell'integrale del differenziale del quale un fattore è sempre identicamente nullo, essendo anzi tal valore atto a distruggere l'azione della sfera su di un punto elevato al di sopra della superficie tanto quanto è l'eccesso dell'asse maggiore della sferoide sopra il raggio della sfera; ed a dire brevissi-

mamente di tutti gli altri, quello dell'equilibrio di più forze traenti un medesimo corpo o punto, sia il corpo o punto libero, ovvero costretto a muoversi su di una superficie, o linea data; quello dell'equilibrio di tre o più corpi attaccati ad un filo inestensibile, od estensibile, e suscettibile di contrazione, od a una verga inflessibile, e rigida, od a una verga elastica; quello dell' equilibrio di un filo, o di una superficie flessibile ed inestensibile, od a un tempo estensibile, e capace di contrazione; quello dell' equilibrio di un filo o lama elastica, e quello analogo della figura da darsi ad una colonna onde la sua solidità sia in bilancio col carico; quello dell'equilibrio di un filo rigido, e di figura data; quello dell' equilibrio di un solido di grandezza sensibile, e di figura qualunque, i cui punti sieno tirati da forze qualunque. Assoggettati alla teoria i corpi solidi, si assoggetteranno ad essa anche i fluidi? senza dubbio. Nè già col mezzo dei due principj di Archimede, che sostenendo ogni parte di fluido tutto il peso della colonna che verticalmente le sovrasta, le parti meno premute sono scacciate da quelle, che lo sono più;

e che ogni cosa spinta in alto da un fluido lo è secondo la perpendicolare, che passa per il suo centro di gravità; nè mediante il principio misterioso dello Stevino della pressione uguale su di uguale fondo in vaso cilindrico, od allo in su convergente, o divergente, nè mercè del principio del Clairaut della pressione in tutti i sensi uguale; ma sì sul principio della natura stessa de' fluidi considerati come ammassi di molecole esilissime, indipendenti le une dalle altre, e perfettamente per ogni verso mobili. Con questo principio unito a quello delle velocità virtuali, ed al calcolo rigoroso della variazione, che soffre il parallelepipedo rettangolare esprimente una molecola di fluido cangiando di posizione, e di lunghezza ne' suoi lati, bello primieramente vederlo rispetto ai fluidi incompressibili, quale si può estimar l'acqua, introdotta questa condizione, dedurne l'equazione dell'equilibrio, e quindi ricavarne con la integrabilità esatta la figura della superficie esteriore libera, e quella degli strati interiori ancorchè varianti successivamente in densità, ma però con legge che in ciascheduno la densità sia in tutti i punti unifor-

me. Più bello il mirarlo applicare il tutto alla figura di equilibrio del mare supponendolo ricoprente la terra di figura elittica poco differente dalla sfera, e di densità da quella dell' acqua diversa, e considerando che le marine particelle sieno attratte per tutte le particelle della terra, e del mare, e sieno ad un tempo animate dalla forza centrifuga nascente dalla rotazione della terra e del mare insieme intorno l'asse, e tirarne tre conchiusioni: 1.ª che computando le potenze delle eccentricità superiori al quadrato, la superficie del mare non sarebbe rigorosamente quella di una sferoide elittica; 2.ª che non contando delle eccentricità della terra che li quadrati, se le eccentricità sono uguali, e la terra è una sferoide di rivoluzione, il mare lo è parimenti, e se la terra non lo è, il mare similmente non lo è; 3.ª che se suppongasi nella terra la densità stessa, che nel mare, allora la figura della sferoide omogenea risulta tale, che l'asse maggiore dell'equatore sta all' asse dei poli come 231 a 230. Più bello ancora l'osservarlo contemplare un fluido attorniante un solido, e dimostrare, che relativamente

alle variazioni dipendenti dallo slocamento del nucleo si può riguardare il fluido attorniante, come se non facesse che una massa solida con esso nucleo, e quinci trasferire all' equilibrio della massa composta l' equazione dell' equilibrio per un solido di figura qualunque tirato da qualunque numero di forze. E bellissima cosa il considerarlo passare felicissimamente dai fluidi incompressibili ai compressibili, ed elastici, aggiungendo soltanto all'equazione generale dell' equilibrio in luogo della condizione della incompressibilità la condizione della elasticità, e trattane la stessa conseguenza della integrabilità rispetto alla superficie; riguardando poi la elasticità dell'aria come il prodotto della densità con il calore provare 1.° che all'equilibrio dell'aria è necessario che il calore sia uguale sopra tutta la superficie della terra, e non varj, elevandosi nell' atmosfera, che da uno strato di livello all' altro; 2.° che la elasticità debbe essere nulla alla sommità, onde il fluido non si dissipi; 3.° che per le altezze del barometro non si può sapere la differenza delle altezze de' luoghi, se non si conosce la legge del calore, secondo le altezze nell' atmosfera. Si

è questo il quadro della Statica Analitica, ossia della scienza analitica dell'equilibrio del Lagrange. E qui io mi dipingo Archimede, il quale ad esaltare la possa della leva gridava: dimmi ove trasportatomi fuori della terra, e del cielo io mi deggia fermare, e terra e cielo io ti moverò; e non conosceva Archimede l'origine della immensa possa. Per ciò in udirla dal Lagrange per me spiegata colla dottrina delle velocità virtuali, ed allo intendere la infinita estensione di questo principio, che tutti i possibili equilibri comprende, io lo mi raffiguro stupefatto, e fuori di se rapito. Ma molto più cresceranno i suoi stupori al sentire la Dinamica, o sia la scienza del moto convertita in statica, o sia scienza d'equilibrio.

Fu propriamente il D'Alembert il primo a ridurre la scienza del moto alla scienza dell'equilibrio (estendendo il principio, che pullulato aveva nella mente di Jacopo Bernoulli meditando intorno alla soluzione del Problema del centro di oscillazione) con considerare i movimenti a più corpi impressi e cangiati per la scambievole loro azione come composti dei moti che prenderanno, e di

altri che resteranno distrutti, e formeranno per conseguenza fra loro equilibrio. Ma il Lagrange dopo avere nella prima edizione della sua Meccanica Analitica seguito il D'Alembert, riflettendo di poi alla difficoltà di riconoscere le forze, che devono distruggersi, come eziandio l'equilibrio tra esse loro, onde rendesi soventi l'applicazione del principio imbarazzante, e penosa, siccome manifestasi nella 2.ª parte della celebratissima Dinamica del D'Alembert medesimo, si volse quinci nella 2.ª edizione della sua Dimanica Analitica a schifare tale difficoltà, e trovò bastare al conseguimento della riduzione della scienza del moto alla scienza dell'equilibrio lo stabilire l'equilibrio tra le forze, ed i movimenti generati presi in senso contrario; poichè se fingasi impresso a ciascun corpo in senso contrario il movimento che deve prendere, egli è evidente, che il sistema sarà ridotto in riposo, per conseguenza sarà mestieri che tali movimenti distruggano quelli che i corpi avrebbero ricevuti e seguiti senza la reciproca loro azione, e quindi vi deve essere equilibrio tra tutti questi movimenti, o tra le forze, che possono produrli. E confessando essere questo

metodo di richiamare le leggi della scienza del moto alle leggi della scienza dell'equilibrio meno diretto in vero, che quello risultante dal principio del D'Alembert, l'adottò ciò nondimeno siccome di maggiore semplicità fornito nelle applicazioni, e su di esso piantò la equazione generale della Dinamica estesa al movimento di un sistema qualunque di corpi da qualunque numero, e diversità di forze animati, la quale è quella medesima dell'equilibrio, aggiunta soltanto la somma delle forze acceleratrici, laonde comprende tutto insieme le dottrine dell'equilibrio diretto, e quelle dell'indiretto, o sia del movimento. Oh mirabilissima equazione! oh equazione immensa! equazione fecondissima di verità, ricolma di luce! Io non so esprimere la tua vastità, e semplicità ad un tempo, che con dirti una immagine, quale all'umano intelletto può essere conceduta, di quell'atto infinito, e semplicissimo, con cui il Supremo Essere contempla tutti gli equilibri, i movimenti tutti nella terra, in ciascheduno degli innumerabili soli, in ciascuno dei pianeti facenti loro corona, nella macchina intera dell'universo, nelle infinite possibili macchine

mondiali. Di fatto in codesta universale immagine si vede il principio Newtoniano della conservazione del movimento del centro di gravità di un sistema di corpi qualunque, come se tutti fossero in un punto uniti e compenetrati, ad onta della reciproca azione loro, ed ancorchè i corpi venissero ad urtarsi, e percuotersi. Vi si mirano con la stessa estensione le tre rotazioni intorno ai tre assi qualunque sia il sistema, qualunque il numero delle forze esteriori, ed interiori; e nel caso che il sistema sia soltanto animato da forze tendenti ad un punto vi si mira il principio dell'Eulero, e di Daniel Bernoulli della conservazione dei momenti di rotazione intorno a qualunque asse, o sia della somma dei prodotti della massa di ciascun corpo per la sua velocità di circolazione intorno ad un centro, e per la distanza sua dal centro medesimo: principio, che comprende l'altro del D'Arcì, di quello del Newton illustre ampliamento, che la somma dei prodotti della massa di ciaschedun corpo per l'aja, che il suo raggio vettore descrive intorno ad un centro fisso sopra un medesimo piano di projezione è sempre proporzionale al tempo; e

vi si mira la determinazione del piano perpendicolare all'asse, per cui la somma dei momenti di rotazione diviene Massima, denominato dal La-Place, che il primo ne dimostrò l'esistenza, e la posizione *piano invariabile*. Vi si comprende il principio Ugeniano della conservazione delle forze vive in un sistema di corpi qualunque, e comunque disposti, e legati purchè indipendentemente dal tempo, che cioè la somma dei quadrati delle velocità in ciascun istante è la medesima, che sarebbe stata se i corpi animati, dalle potenze stesse si fossero mossi ciascuno liberamente sulla linea descritta; in un colla grande dottrina dell'Eulero rispetto ai corpi solidi di qualunque figura trasferita senza limiti ad un sistema di corpi uniti tra loro in una maniera variabile, o no, che nella rotazione istantanea per impulso prodotto intorno ad un asse spontaneo, la posizione di quest'asse è sempre tale, che la forza viva per l'impulsione acquistata da tutto il sistema è rapporto al medesimo asse una quantità massima, o minima; ed in un con la estensione del principio ai corpi fluidi, ed alla percossa dei corpi solidi elastici. Vi si scopre

a due condizioni, l'una delle forze acceleratrici espresse per le distanze dai loro centri l'altra della disposizione del vincolo, dell'azione mutua tra i corpi indipendenti dal tempo, a queste due condizioni verificato vi si scopre il principio al Maupertuisiano della minima azione analogo, e più esteso, che le curve descritte per i differenti corpi del sistema, e le velocità loro sono necessariamente tali, che la somma dei prodotti di ciascuna massa per l'integrale della velocità moltiplicata per l'elemento della curva è un massimo od un minimo, purchè si riguardino come dati i punti primo ed ultimo di ciascheduna curva, onde le variazioni delle ordinate loro sieno nulle. Mi si permetta ora di assomigliare la mirabile equazione ad un prisma triangolare del più fino cristallo, che girato frange la solar luce in più fasce, e le presenta su di bianca parete l'una dopo l'altra a sette diversi colori dipinte, ed a certa posizione ridotto tutte e sette in bell'ordine le offre ad un tempo all'occhio. Non altrimenti la scienza del moto o la scienza dell'equilibrio indiretto per essa equazione col solo giro delle trasformazioni delle va-

riabili, e delle condizioni particolari viene spezzata in diverse classi di equazioni differenziali attinenti a diverse classi di problemi Dinamici: ed in quelle relative ai movimenti di più corpi tendenti ad un centro, e scambievolmente attraentisi; ed in quelle spettanti le rotazioni; ed in quelle appartenenti alle oscillazioni infinitamente piccole; ed in quelle versanti sulla Librazione, ed altri fenomeni dipendenti dalla figura non sferica della luna; ed in quelle concernenti la determinazione delle Tautocrone nei mezzi resistenti; ed in quelle aventi per oggetto il movimento dei fluidi incompressibili; ed in quelle aggirantisi sul movimento dei fluidi elastici. E quale artificio maraviglioso e generale, qualora non riesca il valore finito degli integrali di tali equazioni, per l'approssimazione a talento ad esso con le variazioni delle costanti? e quale ingegno per ricavare la relazione fra tali variazioni? quale sagacità per ritrovare le espressioni più semplici di esse variazioni dovute a forze perturbatrici? Quinci il suo spaziare franco per i cieli, ed oltre al considerare l'orbita di ciaschedun pianeta da se sola, e sciogliere con facilità

e semplicità per serie regolare, e di conosciuto termine generale il famoso problema di Keplero di determinare l'anomalia vera per la media; e dimostrare per via semplice e naturale l'elegante teorema del Lambert, che in elissi descritta per forze tendenti ad uno de' fuochi, ed agenti in ragione quadrata inversa delle distanze, il tempo non dipende che dal grand'asse, dalla corda che sottende l'arco percorso, e dai due raggi vettori condotti alle estremità dell'arco stesso: con quale nobile ardire si spigne egli a calcolare gli effetti delle perturbatrici mutue attrazioni, che altro non fanno, che rendere variabili i costanti elementi delle orbite non perturbate, e naturali, cioè la metà del grand'asse, ed il suo luogo nell'orbita, la eccentricità, l'inclinazione del piano dell'orbita medesima al piano dell'Ecclittica, il sito delle intersezioni di questi due piani, o sia dei nodi loro? E distinte le variazioni in periodiche, e secolari, le prime passeggiere ed alternative, dipendenti dalla varia combinazione dei collocamenti dei pianeti fra loro; le seconde continue, e via via lentissimamente crescenti nella lunghezza dei secoli; e conseguente-

mente divisa l'equazione di ogni variata costante in due, l'una composta di termini involgenti il tempo sotto seni, e coseni circolari, e perciò inducenti periodo; l'altra di termini contenenti il tempo da questo involgimento libero, e perciò producenti perpetuo accrescimento, con quale sorprendente sottigliezza, ed indefessa fatica assegna per ciascheduno dei sei pianeti le secolari variazioni dell'Afelio, della eccentricità, dell'angolo dell'orbita con l'ecclittica sì fissa, che mobile, del luogo dei nodi? E con qual prodigio di finezza dimostra insieme il portentoso teorema, che ad onta di tante perturbazioni le distanze medie dei pianeti, ed i movimenti loro medii non sono a variazioni secolari punto soggetti, neppure in Saturno, ed in Giove, e che per conseguenza il nostro planetario sistema è stabile quantunque perennemente oscilli. E di queste oscillazioni periodiche rispetto a tutti gli elementi delle orbite con quale felice successo, schifando il difetto a tutti gli altri metodi comune di esibire sul primo approssimamento una espressione inesatta del raggio vettore, introducendovi termini al tempo proporzio-

nali, od usandovi per declinarli mezzi, o troppo complicati, o troppo indiretti, con qual felice successo ne ricava le equazioni, e con quali penosi e industri calcoli le applica a ciaschedono dei pianeti da tutti gli altri reciprocamente perturbato, ed alla terra principalmente? Ma se è stabile, e soltanto periodicamente oscillante il sistema de' primarj pianeti, non è però immune da equazione secolare del medio movimento la luna, ed il Lagrange ne ricava dalla variante eccentricità della orbita della terra lo spiegamento, ed il valore della variazione a poco a poco crescente. Molto maggiori sono le irregolarità periodiche dalla luna sofferte. Il calcolo di esse dipende dal problema dei tre corpi, soggetto di un saggio dell'autore premiato l'anno 1772 dall'Accademia di Parigi. Il nuovo metodo, che egli v'impiega di determinare l'orbita di ciaschedun corpo per le sole distanze di tutti e tre, o sia per il triangolo per essi formato a ciaschedun istante, cercandone le equazioni, ed in seguito, supposte le distanze conosciute, deducendone i movimenti relativi, addomanda un'analisi assai complicata, e dilicatissima Pure all'intento generalmente riuscito, dopo

avere investigato in quali casi i corpi potessero muoversi di maniera, che le distanze loro fossero sempre costanti, od almeno conservassero tra loro costanti rapporti, e trovato poter ciò aver luogo in due casi, l'uno, che i corpi fossero in linea retta disposti, l'altro, che formassero un triangolo equilatero, discende al supposto, che uno dei tre corpi disti grandemente dagli altri due, che è il caso del sole riguardo alla terra, ed alla luna, ed applicando la generale dottrina ne raccoglie a preziosissimo frutto la teoria delle moltiplici disuguaglianze periodiche della luna dalle combinazioni diverse de' luoghi di essa rispetto alla terra, ed al sole provegnenti. E come poteva atterirsi di questo problema quegli che l'anno 1766 aveva dalla medesima Accademia di Parigi riportata la corona sul problema delle disuguaglianze dei satelliti di Giove, cioè di quattro lune in luogo di una sola? Qui di fatto, che complicazione di attrazioni su di ciascun satellite per parte di Giove sul suo asse rapidissimamente rotante con sferoidica figura, probabilmente di una infinità di strati di diverse densità composta, e con l' equa-

tore nel piano della sua orbita, ed a cagione della varia eccentricità di questa variante la sua azione? E qual complicazione maggiore per parte degli altri tre satelliti, di attrazioni tanto varie, quanto differenti le loro masse, quanto diverso il loro movimento, e quanto variante la configurazione loro? E ciò nulladimeno ne stabilisce le equazioni differenziali, e con eleganza le integra, e ne ricava le espressioni dei raggi vettori, e delle longitudini, del movimento degli absidi, dei nodi, delle inclinazioni, quelle della disuguaglianza dell'equazione del centro, e della latitudine, quelle delle disuguaglianze accadenti al tempo delle ecclissi, o sia congiunzioni con Giove rispetto alla terra, e quelle delle variazioni dipendenti dal periodo di 12 anni ne' quali Giove rivolgesi intorno al sole: con il bel pensamento inoltre, che per determinare l'orbita di un satellite qualunque non si ha che ad immaginare quattro piani passanti per il centro di Giove, de'quali il primo si muova su quello dell'orbita di Giove stesso, ritenendo sempre con esso la inclinazione medesima; il secondo si muova similmente sul primo, il terzo sul secondo,

ed in fine il quarto, che sarà l'orbita del satellite si muova del pari sul terzo; e con la sottile riflessione di non essere rigorosamente vero, che le durate delle ecclissi dei satelliti sieno uguali avanti, e dopo le congiunzioni; e dalla disuguaglianza di esse, supposta una sufficiente esattezza delle tavole, onde sapere il tempo della congiunzione, e supposto il comodo di osservare insieme l'immersione, e la emersione, un nuovo modo di determinare la tangente della inclinazione del sentiere del satellite nella sua ecclissi. Ma non pago di essersi coll'arte de' suoi calcoli aggirato per le regioni de' pianeti, con qual possa si scaglia, e sospigne per le regioni lontanissime delle comete, a determinarne in tre Memorie le orbite? Tessuta nella prima con bell'ordine, e fina critica la storia dei varj metodi escogitati per determinarle col mezzo di tre osservazioni, e principalmente del secondo, e più esteso del Newton dalla più parte degli autori posteriori passato sotto silenzio, o non riguardato che come un metodo grafico, e di uso assai difficile, e di quello del Lambert ornato di elegante teorema, e di sottile ripiego onde

non tener conto della saetta dell'arco percorso tra la prima, e la terza osservazione, ma insieme difettoso in stabilire, nella seconda osservazione, di 6.° grado l'equazione della distanza della cometa dalla terra, che non può realmente abbassarsi che al grado 7.°, e fatto riflesso, che tali metodi tutti non sono abbastanza diretti, e cavati dalla natura del problema, ma piuttosto particolari considerazioni, e supposizioni precarie, e che son molto complicati, e non conducenti che a risultamenti incerti, ne' quali non si può apprezzare l'effetto degli errori nascenti dalle ipotesi su quali sono fondati, toglie nella seconda ad investigare un metodo diretto, ed analitico, dante a dirittura senza andare a tentone i primi valori delle quantità sconosciute del problema, e da se stesso offerente la facoltà di correggere codesti valori, e renderli a grado esatti, e giugne di fatto ad espressioni dello scioglimento del problema rigorose, rappresentate sotto forma la più semplice, ed a un tempo la più propria a guidare ad approssimazioni le più dirette, e facili. E nella terza poi chiamando in opera le tre equazioni del movimento di un corpo

attratto ad un centro, e spinto insieme da forza di projezione, e combinandole con le equazioni somministrate dalle tre osservazioni arriva a tre finali equazioni comprendenti li tre principali elementi desiderati dell'orbita, cioè il parametro, il grand'asse, ed il luogo del perielio: equazioni, che posti gli intervalli delle tre osservazioni piccolissimi si riducono a due lineari, ed una di 7.° grado, al ribassamento della quale può servire la quarta soprabbondante del grande asse infinito nel caso di supporre l'orbita della cometa una parabola. Nè solo egli lavorò in tre Memorie a determinare le orbite delle comete, ma altresì in una quarta a sciogliere il problema per la seconda volta dall'Accademia di Parigi nel 1778 proposto di calcolare le perturbazioni, che esse dai pianeti soffrono, e sì lo sciolse che ne ottenne il doppio promesso premio. Tutta la difficoltà nasce dall'impossibilità di servirsi dello stesso metodo di appressimazione per tutte le parti dell'orbita. Ma il Lagrange ravvisando sotto un nuovo punto di vista il problema, ha ritrovato il modo di frangere questo ostacolo impiegando tre metodi, l'uno per la

parte superiore dell'orbita, l'altro per la parte inferiore, il terzo per il punto di questa parte inferiore, dove la distanza tra la cometa, ed il pianeta perturbatore è molto piccola e si avvicina al suo minimo. Riguardo alla parte superiore le equazioni differenziali delle perturbazioni si dividono in due porzioni, una delle quali è assolutamente integrabile, l'altra non lo è, ma si restringe, a tanto maggiore piccolezza, quanto la cometa è più lontana dal sole, di guisa che diventa insensibile, allorchè la cometa ne è ad una grandissima distanza. Riguardo alla parte inferiore dell'orbita, dopo aver ridotte le equazioni differenziali delle perturbazioni ad una forma più semplice, e più per il calcolo comoda, dimostra ciò non ostante gli ostacoli alla generale integrazione, che obbligano di ricorrere alle quadrature delle curve meccaniche, osservando però, che il ricorrervi cessa di essere legittimo nel caso accennato del punto in cui la distanza tra la cometa ed il pianeta perturbatore è piccolissima, e si avvicina al suo minimo, ed offerendo per tal caso un metodo particolare che riducente l'integrazione ai logaritmi o ad archi di cerchio

non è a verun inconveniente soggetto. Più oltre ancora si slancia, sino a cercare delle comete l'origine; poichè avendo l'Olbers scopritore di due dei quattro recentemente scoperti minuti pianeti escogitata l'ipotesi che sieno essi frammenti di un più grosso pianeta rivolgentesi intorno al sole ad una distanza prossimamente uguale alla presso che comune ai quattro detti pianeti, venne egli spinto dalla sua analitica curiosità ad indagare qual forza di esplosione si richiederebbe nello scoppio di un pianeta per ragione di un fluido elastico sprigionantesi, onde uno de' suoi pezzi divenisse una cometa; e dopo avere trovata generalmente la ragione della velocità dell'impulsione alla velocità del pianeta nella sua orbita elittica, e le espressioni dei coseni degli angoli della direzion dell'impulso col grand'asse, con una retta ad esso perpendicolare nel piano dell'elissi, e con una perpendicolare a questo, ne deduce che scoppiando pianeti giranti in cerchio, od in elissi al cerchio vicinissime, al di là da Urano, alla distanza dal sole cento volte quella della terra, sarebbe stata bastante una esplosione producente velocità 12 o 15 volte quella di

una palla di 24 libbre all'uscire dal cannone a trasformare i pezzi in comete elittiche o paraboliche in tutte le dimensioni, e in direzioni o dirette o retrograde; e che scoppiando per fermentosa violenza di concentrato calore un pianeta dal sole distante in ragione di 27 a 10 alla distanza della terra dal sole, e supposto che i frammenti proseguano a muoversi in orbite presso a poco uguali a quella del pianeta scoppiato, ma differentemente situate, quale sarebbe il caso dei quattro pianeti, le velocità impresse dall'esplosione sarebbero minori di 20 volte quella di una palla di 24 libbre allo spingersi fuori del cannone. Ruotano i corpi celesti intorno i proprj assi, e naturalmente dopo la dottrina delle orbite segue quella delle rotazioni. A mostrare quanto profonda sia questa dottrina presso il Lagrange basti il dire, che l'Eulero nel capo 2.° dell'aggiunta alla sua teoria del moto dei corpi rigidi, edizione novella dell'anno 1790 la esalta come segue: *Haec tanta incommoda* (le difficoltà somme dell'argomento) *etiam sagacissimus Lagrange animadvertisse videtur, dum hoc argumentum in commenta-*

riis Accademiae Borussicae pro anno 1773 *alia methodo tractandum suscepit, cujus quidem profundissimas meditationes maxima cum aviditate perlustrare sum conatus, verumtamen a me impetrare non potui, ut omnes ejus calculos penetrarem; statim enim primum Lemma me deterruit, ut ob defectum oculorum nullo modo sperare potuerim omnia artificia, quibus est usus, perscrutari.* Eppure si sa, che l'insigne cebratissimo uomo ad onta della perduta vista proseguì sino alla morte ad occuparsi in lavorare, e porre alla luce squisite opere sublimi. E ben a ragione tali esaltamenti, poichè il Lagrange, dopo avere dimostrate le proprietà relative alle rotazioni prodotte da forze d'impulsione in un sistema del tutto libero: quali, di potersi prendere il punto fisso ovunque piace; di potersi riferire le rotazioni a tre assi passanti per il centro di gravità; di estendersi gli effetti delle impulsioni nel primo istante agli istanti seguenti; di essere costanti le somme dei momenti delle impulsioni rapporto ai tre assi; di potersi quinci determinare in un sistema invariabile qual è un corpo solido di figura qualunque le velocità

da principio, e la posizione dell'asse spontaneo di rotazione; di avere in qualunque istante il corpo il medesimo movimento di rotazione, che egli riceverebbe in tale istante per l'impulsione delle forze stesse, che lo hanno posto da principio in movimento, se esse forze gli fossero applicate in modo di produrre in esso i medesimi momenti d'intorno ai tre assi; di conseguire una massa fluida agitata da forze qualunque, poi a se stessa abbandonata, e divenuta solida per l'attrazione delle sue parti, a qualunque istante il movimento medesimo di rotazione, che le forze primitive le imprimerebbero se agissero nella stessa maniera sulla massa solida; essere però impossibile, che una massa fluida qualunque possa formare un corpo solido, che abbia un movimento di rotazione, a meno, che le impressioni primitive non sieno state tali, che ne sia risultato un momento intorno all'asse di essa rotazione: dopo spiegate le proprietà degli assi fissi di rotazione di un corpo di figura qualunque, determinando quelli che sono detti assi principali, o naturali di rotazione, ed i belli loro attribuiti per la semplice ipotesi, che l'asse istan-

taneo di rotazione resti immobile nello spazio, od almeno sempre a se medesimo paralello, allorchè il corpo ha un movimento progressivo, e derivando quinci quale delle somme dei prodotti di ciascheduna particella del corpo con il quadrato della sua distanza dai tre assi, che Eulero chiama momenti d'inerzia, sarà una quantità massima, quale una minima, quale non avrà nè l'una nè l'altra proprietà, e così degli aggregati di esse somme: dopo tutto ciò piglia il prestantissimo analista arbitrarj i tre assi immobili entro il corpo, ma mobili nella rotazione, ed i tre assi fissi nello spazio, intorno ai quali si può fare la rotazione, e quinci esibendo più generali, che mai fatto si sia, le equazioni differenziali delle rotazioni, determina rispetto agli uni, ed agli altri assi i coseni degli angoli dell'asse spontaneo di rotazione istantanea, apre il passaggio dalle funzioni circolari degli angoli dell'asse spontaneo di rotazione a quelle degli angoli dell'asse del corpo, e reciprocamente; d'onde progredendo alle equazioni per il movimento di rotazione d'un corpo solido qualunque animato da forze qualunque, distinti due casi, l'uno che il corpo sia libero, l'altro che sia

costretto a muoversi intorno ad un suo punto, perviene rispetto al caso primo ad equazioni più semplici, e per il calcolo più comode di quelle del D'Alembert usate nelle eccellenti sue ricerche sulla precessione degli equinozj, e disceso alla determinazione del movimento di rotazione di un corpo di figura qualunque animato dalla gravità conduce nella maniera più generale, più diretta, più semplice, più chiara, anzi più elegante le equazioni differenziali ad integrazione; e rispetto al caso secondo, mostrata la difficoltà di risolvere il problema generalmente, dà a divedere come la risoluzione riesca facile per le sue formole supponendo il corpo un solido di rivoluzione, presenta la teoria generale delle piccole oscillazioni de' pendoli, e corona la dottrina con lo scioglimento di un problema non mai stato sciolto, qual è quello del movimento di un corpo sospeso da un suo punto, che faccia piccolissime oscillazioni, ed abbia tutt' insieme un movimento qualunque di rotazione intorno ad un asse passante per il suo centro di gravità, problema tanto più difficile, quanto che la forza centrifuga nascente dalla rotazione può grandemente

sconcertare le oscillazioni o circolari esaminate da Huygens, o le coniche considerate da Clairaut. Parlando di rotazioni, e di oscillazioni piccolissime cade in acconcio il dire della Memoria del sottilissimo autore su gli elastri piegati. E non è già degli elastri, che agiscono allungandosi, od accorciandosi, che egli piglia a trattare, ma sì delle lamine elastiche inestensibili, e piegate a spirale, tali quali si applicano agli orologi, o ad altre macchine simili; ed il problema non mai da verun geometra sciolto, che si propone, si è: essendo una lamina elastica di data lunghezza, e fissa in una delle sue estremità stretta da forze qualunque che agiscano sull'altra estremità, e la ritengano in una posizione data determinare la quantità, e la direzione delle forze. Ma prima, tolta quinci occasione, prende a dimostrare quanto semplicemente, rigorosamente altrettanto il principio, sul quale scioglier si suole il problema della curva elastica, che la forza dell'elastro in ciaschedun punto dev'essere proporzionale alla somma dei momenti di tutte le potenze tendenti: principio da un grande geometra chiamato in dubbio per essere persuaso, che

non si possano concepire momenti che nei corpi assolutamente inflessibili. Indi, volgendosi al suo problema con l' uso dell'altro principio, che la forza, onde la lamina elastica resiste ad essere incurvata è sempre proporzionale all'angolo dell'incurvamento, o sia in ragione inversa del raggio osculatore, ricerca le equazioni differenziali al problema appartenenti, e trovandole troppo complicate di modo a non poterlesi integrare, ripiegasi ad addurle a dare almeno in una equazione differenziale la vera figura del fuso, o di quel cono scannellato, intorno a cui si aggira, e si attortiglia la catena dell'orologio, o l'elastro motore sia con una estremità fisso nel centro del tamburo, ovvero in un punto qualunque dell' asse, essendo con l'altra estremità attaccato alla circonferenza del tamburo stesso. E procedendo a considerare una lamina elastica applicata al bilanciere, con supporre che l' incurvamento sia assai piccolo, dimostra, che fissata la lamina comunque lunga con una estremità ad un punto fuori della circonferenza del bilanciere, con l'altra ad un punto della circonferenza medesima, si otterrà sicuramente, che le oscillazioni del bilanciere sieno

isocrone, almeno sin a tanto che sieno piccolissime, ciò che niuno valuto era a dimostrare; che fissata la seconda estremità della lamina perpendicolarmente al raggio del bilanciere, più l'elastro sarà lungo, ed il numero degli spirali suoi giri sarà maggiore, più l'oscillare del bilanciere si approssimerà a quello di un pendolo circolare, purchè la lamina elastica sia uniforme in grossezza, e che il suo stato libero sia quello della linea retta; che fissata la medesima seconda estremità all'asse del bilanciere sarà questo, in certo caso di una grandissima lunghezza della lamina elastica, e di una grandissima ampiezza del totale suo arco, posto in giro quasi senza oscillazione; che facendo di questo modo operare l'elastro motore chiuso nel tamburo, rendendosi la sua azione presso che costante, vano si renderebbe il fuso. Se non che le ipotesi di una grandissima lunghezza della lamina elastica, e della naturale sua dirittura non convengono agli elastri soliti ad usarsi negli orologi; laonde non tutte le verità dimostrate possono ad essi applicarsi; possono però tutte divenir utili in altre occasioni. In proposito poi di orologi, degli elastri motori

e dei bilancieri loro si apre naturalmente il luogo ad un cenno sulla Memoria intorno allo scappamento, o sia intorno al conflitto tra il movimento, che continuamente per l' azione dell' elastro si accelererebbe della ruota di riscontro, e le oscillazioni del regolatore. Qual vaga cosa vedere elevato ad alta geometria, e meccanica un meccanismo, e dalla teoria delle curve, e dalle formole fondate sulle velocità virtuali mirarsi condotto a distinguere lo scappamento a retrocedimento, e lo scappamento a riposo, ed a prescrivere la natura delle curve per l'uno e per l'altro? Ma più vasto, che non delle oscillazioni piccolissime de' pendoli, e dei bilancieri si è il campo delle piccolissime oscillazioni in genere di un sistema qualunque di corpi. Vero è però, che la classe delle equazioni differenziali qui spettanti ammette integrazione assoluta appunto per la piccolezza degli allontanamenti dal punto di equilibrio. Pure singolari sono gli artificj, con i quali le integra il Lagrange, e con i quali si conduce a conoscere, e rigorosamente dimostrare, 1.° che qualora nelle integrazioni si troverà il tempo avviluppato sotto i seni e coseni cir-

colari, la espressione delle oscillazioni sarà un minimo, laonde se il sistema, per esempio una nave prenda ad oscillare, si ristabilirà, stringendo a poco a poco le oscillazioni, all'equilibrio; ed all'incontro, qualora il tempo riesca fuori delle accennate circolari funzioni, la espressione delle oscillazioni sarà un massimo, e la nave per esempio, crescendo di più in più la larghezza delle oscillazioni, anderà a rovesciarsi; 2.° a comprendere, che allora quando, per essere l'espressione delle oscillazioni un minimo, l'equilibrio è stabile, le oscillazioni dei differenti corpi del sistema possono essere riguardate come composte di oscillazioni semplici e analoghe a quelle di tanti pendoli, ed a ricavar quinci direttamente ciò che per sola induzione risultava dalla teoria di Daniele Bernoulli, che in generale le oscillazioni qualunque di un sistema non saranno composte, che delle oscillazioni semplici, che potranno aver luogo per la natura del sistema, e che per irregolari che la natura le presenti, possono sempre ridursi a tante oscillazioni semplici quanti sono i corpi oscillanti nel sistema; 3.° a distinguere quando i tempi delle oscillazioni

saranno incommensurabili, e per conseguenza il sistema non potrà riprendere la sua primiera posizione, e quando saranno commensurabili, e conseguentemente il sistema tornerà alla sua posizione primiera, ed a determinare il tempo del ritorno. Nè contento di equazioni a differenze infinitamente piccole ha il coraggio di lanciarsi in equazioni a differenze tutt' insieme finite, ed infinitamente piccole, rendendo soggetto di sua investigazione le oscillazioni di un numero qualunque di corpi ordinati in linea retta, o curva, animati da forze qualunque combinate con le mutue azioni loro, e poscia trasferendo le semplici e generali formole emergenti a problemi di difficilissima analisi, e restii allo scioglimento completo per altri metodi, come quello delle vibrazioni di una corda tesa, e caricata di più corpi, e delle oscillazioni di un filo inestensibile gravato di un numero qualunque di pesi, e sospeso per le due sue estremità, o per una soltanto. La prima parte è il problema delle corde vibrantisi, ed il sommo analista, determinando il movimento di ciascun corpo per una particolare equazione differenziale, riesce a ritrovar poi per via

di somme finite combinate con gli integrali, a ritrovare le espressioni generali delle escursioni dei diversi corpi longitudinali nella linea, od asse da estremità ad estremità fissa della corda, e le trasversali o laterali nella direzione ad esso asse perpendicolari; a scoprire che a meno che tali espressioni non si riducano ad un sol termine la corda non potrà mai ripigliare la sua prima posizione, ed i corpi non potranno fare oscillazioni semplici, ed isocrone; ed a dimostrare, che una corda di data lunghezza, tesa, ferma nelle due sue estremità, e caricata di un certo numero di corpi, essendo divisa in tante parti uguali, in quanto è divisibile il numero de' corpi accresciuto dell'unità, se il suo stato da principio suppongasi tale, che i corpi collocati nei punti di divisione non abbiano ricevuto alcuno scuotimento, e che quelli, che sono di qua, e di là abbiano ricevuti scuotimenti uguali, ma in senso contrario, oscillerà come se i punti di divisione fossero fissi, e che la corda non avesse che la lunghezza di una delle uguali parti, nelle quali è stata divisa. La seconda parte del filo inestensibile gravato di un numero qualunque di pesi,

e sospeso per le due sue estremità, o per una, viene ridotta al ritrovamento delle radici di una equazione di grado uguale al numero de' pesi, de' quali il filo è gravato, radici che egli dimostra dover necessariamente essere tutte reali positive, e disuguali. Con il problema delle corde vibrantisi è intimamente legato quello delle corde sonore, e qui è dove singolarmente spicca l'eccellente metodo dell'autore, col quale, contro il costume di adoperarvi direttamente l'integrazione di una equazione differenziale, ne deduce egli lo scioglimento dalle sue espressioni di somme finite dei movimenti di indefiniti corpi caricanti una corda, considerati ciascheduno a parte: scioglimento, che prescindendo da qualunque figura, che la corda possa avere avuta al principio delle sue oscillazioni, la lascia arbitraria. E primieramente dal divenire infinito il numero de' corpi, onde la corda è caricata, ed infinitamente piccolo l'intervallo loro, cangiandosi i corpi nelle sue particelle, ne segue tosto, che diventando commensurabili i tempi delle escursioni longitudinali, e delle escursioni trasversali, la corda riprenderà sempre in un determinato

tempo la sua primitiva figura qualunque possa essere stata, e le sue vibrazioni saranno bensì isocrone tra loro, e sincrone a quelle di un pendolo di certa lunghezza, ma la legge loro sarà differente da quella delle vibrazioni dei pendoli, e dipenderà dallo stato primitivo della corda. Ne segue in secondo luogo, che può bensì una corda dividersi da se stessa in parti aliquote, quante più piace, poichè il numero de' corpi essendo infinito può essere da qualunque numero intero diviso, e quinci può essa corda rendere infiniti toni, che sieno al principale della oscillazione intera nella ragione delle frazioni esprimenti le parti alla unità, come dall'esperienza viene manifestato accadere, toccando leggiermente la corda nella sua vibrazione in uno dei punti di divisione che chiamansi nodi di vibrazione. Ne segue per terzo non potersi tuttavia ammettere in un col riguardare siccome arbitrario lo stato iniziale della corda la spiegazione da Daniele Bernoulli vantata, e da molti altri adottata de' suoni armonici al tono principale contemporanei, e volendo pure a forza spiegare la risonanza molteplice per le vibrazioni intera, e parziali

ad un tempo, essere mestieri supporre la figura iniziale come formata di curve sovrapposte l'una all'altra di maniera, che l'una serva alla seguente di asse, e la prima non abbia, che un ramo in tutta la estensione della corda, la seconda abbia due rami uguali simmetricamente collocati, che dividano l'asse in due parti uguali, la terza tre rami uguali, che lo dividano in tre parti uguali, e così di seguito. Ma questa composizione di curve essendo ipotetica del tutto, la spiegazione perciò della coesistenza dei suoni armonici in una corda essere del tutto precaria. In quarto luogo esaminando le curve rappresentanti i valori delle escursioni longitudinali, e trasversali e delle velocità loro ne segue, che le ordinate lontane tra di loro dell'intervallo uguale alla doppia lunghezza della corda sono uguali, e del medesimo segno, e che le aje fra esse comprese sono pure uguali, d'onde si determina il tempo nel quale le escursioni longitudinali, e trasversali ritornano le medesime. Ne segue per quinto che non avendo tutti gli altri autori considerate che le escursioni, o sia vibrazioni trasversali, ed avendone trovata la durata la me-

desima, che quella col novello metodo definita; avendo per altra parte il sig. Chladni fatta il primo menzione delle vibrazioni longitudinali nel suo trattato di Acustica, ed assegnato il modo di produrle in una corda di violone, ed osservato, che il tono per esse prodotto non è lo stesso, ma sempre più elevato, che quello delle vibrazioni trasversali, bisognerà quinci che nell'ipotesi verosimigliantissima, che la forza elastica, per la quale ciascun elemento della corda resiste ad essere allungato, o tende ad accorciarsi, sia proporzionale ad una potenza dell'elemento, la potenza non sia già quella della unità, ma altra dell'unità maggiore. Ne segue finalmente, che non essendo a difficoltà alcuna soggette le espressioni del movimento di una corda tesa, e caricata di un numero indefinito di corpi uguali per essere il movimento di ciascun corpo determinato per una particolare equazione, trasferite queste medesime espressioni al movimento di una corda uniformemente grossa ed omogenea, supponendo divenire nelle sue particelle il numero de' corpi infinito, e le distanze loro infinitamente piccole, la legge che ne risulterà per le vibrazioni

della corda sarà intieramente indipendente dal suo stato iniziale, e che trovandosi questa legge conforme a quella dedotta dalle funzioni arbitrarie, resta dimostrato che esse funzioni arbitrarie possono essere di una forma qualunque continua, o discontinua, purchè rappresentino la figura primitiva della corda. La librazione reale della luna, e gli altri fenomeni dipendenti dalla sua non sferica figura sono, per la massima parte, certe specie di piccole oscillazioni, ma che richiedono altre equazioni ed altre dottrine: l'unione cioè della dottrina del rivolgimento di un corpo in un' orbita, della dottrina delle rotazioni, della dottrina delle attrazioni delle sferoidi. Cercata pertanto la figura non sferica della luna, computando su di ciascheduna delle sue particelle l'attrazione di tutta la sua massa, l'attrazione della terra, la forza centrifuga dalla rotazione nascente, e fissatala in una elissoide, i cui meridiani, e l'equatore sieno elittici, ma con l'asse maggiore dell'equatore diretto verso la terra, incomincia a ricavare la influenza della figura non sferica della luna sul suo movimento nella orbita intorno alla terra, e risulta insensibile. Procede alla

librazione fisica e reale consistente in una oscillazione della luna, per cui ci conduce e ci fura alternamente allo sguardo una qualche porzione dell'emisfero alla terra avverso, che sempre interamente ci dovrebbe rimanere nascosto, essendo il tempo della rotazione intorno il suo asse uguale a quello del suo rivolgimento intorno alla terra; e quinci del tutto distinta dalla librazione ottica prodotta dal movimento non uniforme della luna nella sua orbita, e dalla inclinazione dell' orbita medesima al lunare equatore, e che sarebbe la stessa, quand'anche la luna fosse assolutamente sferica, ed il suo movimento di rotazione fosse uniforme; e dopo finissimi calcoli dimostrando non essere considerabile la parte della reale librazione dovuta alle disuguaglianze del movimento della luna intorno a noi, ne dimostra tutt' insieme la parte nascente dalla rotazione della luna intorno al suo asse, e dalla sua non sferica figura, parte piccola bensì ma ascendente a rendersi osservabile in lungo spazio di tempo, e ne determina la durata, paragonandola ad un pendolo, che facesse oscillazioni molto ristrette in un tempo, che stesse a mezzo il moto

periodico, come la radice dell'unità divisa per 3 volte la differenza degli assi dell'equatore elittico lunare alla unità; onde siccome un pendolo, che non abbia ricevuto che una impulsione molto piccola, viene ritenuto intorno alla perpendicolare dalla gravità, così a togliere la differenza tra gli angoli dai meridiani della luna descritti intorno il suo asse, e gli angoli nel tempo stesso percorsi dal centro della luna intorno alla terra, la quale differenza crescendo continuamente porterebbe, che la luna presenterebbe successivamente le sue faccie alla terra, basta che la luna abbia ricevuto una velocità di rotazione primitiva poco differente dalla velocità media di sua traslazione, e che in seguito l'azione della terra distrugga l'effetto di questa piccola differenza coll'impedir il lato della luna rivolto alla terra di allontanarsene oltre un certo limite, che è lo spiegamento della librazione dalla Accademia di Parigi premiato l'anno 1764. Inoltrasi ad esaminare il movimento dalla figura non sferica cagionato nei punti equinoziali della luna, e nella inclinazione del suo equatore sulla ecclittica, e giunge ad espressioni, dalle

quali risulta, che in una ipotesi delle costanti arbitrarie il luogo medio del nodo discendente del lunare equatore coincide col luogo medio ascendente dell'orbita lunare giusta la teoria del Cassini sulle osservazioni del suo secolo, confermata dal Mayer, e dal De-Lalande dietro osservazioni più recenti; e che in un caso della differenza di certi angoli la tangente dell' angolo d'inclinazione sarà un massimo, od un minimo da non potersi sì presto determinare con le osservazioni, e che generalmente il nodo discendente dell' equatore lunare, e la inclinazione sua sulla ecclittica possono fare certe oscillazioni più o meno grandi d'intorno al luogo medio, ed alla inclinazione media, senza che mai i nodi veri si possano allontanare dai medj di gradi 90, e che l'inclinazione possa divenir nulla, ciò che basta a spiegare le irregolarità avvenute nei risultamenti delle osservazioni sopra questi due elementi. Si avanza ad indagare l'effetto della figura non sferica della luna sul suo movimento intorno alla terra, e sembrandogli ai primi calcoli che possa derivarne nella longitudine l'equazione secolare dal Mayer sospettata, ed indarno sino allora cercata,

discute la cosa a fondo, e la rinviene finalmente nulla, e nulla pure risulta combinata la figura sferoidica della luna con la sferoidica figura della terra nella Dissertazione dall'Accademia di Parigi premiata l'anno 1774.

Ci presenta il nostro prisma la sua dottrina sulle curve tautocrone cioè quelle curve, al lungo delle quali salendo o discendendo un corpo impiega sempre a percorrere un arco qualunque preso dal punto più basso un medesimo tempo. Incominciata la teoria da Huygens con dimostrare essere la cicloide la tautocrona nel voto, promossa da Giovanni Bernoulli, e da Eulero con determinare le tautocrone in un mezzo resistente in ragione del quadrato della velocità, ed in qualunque ipotesi della gravità, fu recata molto più oltre il supposto della resistenza del mezzo in ragione del quadrato della velocità dal signor Fontaine nell'opera inserita tra le Memorie dell'Accademia di Parigi, una, dice il Lagrange, delle più belle adornanti tale raccolta, che più di ogni altra contribuì alla celebrità dell'autore, ed ascesa a tal grido che si giudicò por fine alle ricerche intorno alle tautocrone, delle quali più non si parlò.

Così però non parve all'acutissimo analista Lagrange, il quale per l'opposto stimò rimanere a cercare in generale: quale è la forza necessaria a produrre il tautocronismo, riguardandola siccome funzione dello spazio, e della velocità. Questo problema pertanto prese egli a sviluppare nella Memoria sua tra quelle di Berlino per l'anno 1765. E ben conseguì il suo scopo nel trovare l' espressione generale di tale forza, e ritrarne per corollario il bel teorema, che la curva che è tautocrona nel voto od in un mezzo resistente come il quadrato della velocità, lo deve altresì essere in un mezzo resistente in ragione della semplice velocità, od in parte del quadrato della velocità, e nello scoprire le infinite maniere, onde rendere lo scioglimento molto più esteso, prendendo una qualunque funzione della velocità in qualunque punto divisa per il prodotto della funzione primitiva dello spazio da percorrersi, e della funzione sua derivata purchè nulla riesca cotale funzione, posta la velocità nulla, ed infinita concependo lo spazio da trascorrersi nullo. Il signor Fontaine insensibile alle lodi tributategli dal Lagrange, e sensibile al

discapito della gloria di avere condotta a perfezione la teoria delle tautocrone, lungi dall'imitare l'esempio del D'Alembert, e dell'Eulero assalì con tratti, ritenutamente dice il Lagrange, poco obbliganti la sua Memoria, ma egli secondo il carattere dell'uomo grande, e superiore, contento di averne fatto cenno con modesto stupore, lasciò alla lettura della Memoria dell'avversario e della sua novella la sentenza delle critiche di quello. Al problema trattato nella prima Memoria ne premette uno non mai stato sciolto, e spandente su quello delle tautocrone un grande splendore, ed è: dato lo spazio totale, che può percorrere un corpo partente da un certo punto con una certa velocità, e continuamente nel suo cammino ritardato per una forza variabile, si concepiscano lo spazio qualunque percorso in un tempo, e la velocità al fine del tempo stesso, ed una funzione qualunque data dello spazio indeterminato e del totale: si chiede per quale funzione della velocità detta e dello spazio percorso deve essere espressa la forza variabile della resistenza, onde il tempo detto sia uguale ad una funzione qualunque della funzione data.

Sciolto magistralmente questo problema, trattane per conseguenza la risoluzione di quest'altro: trovare la legge della forza acceleratrice necessaria, onde il corpo ponga sempre il medesimo tempo a percorrere uno spazio qualunque, che abbia una relazione data allo spazio totale; illustrata la soluzione del problema della Memoria prima si fa al confronto della sua risoluzione, e di quella del Fontaine, ed oltre al notare, che egli si contraddice nel porre nella teoria una funzione come di dimensione nulla, che nell'esempio poi riesce di dimensione non nulla, prova, che la soluzione sua accusata di particolare dal Fontaine è generalissima, e godente in una sola equazione il vantaggio di comprendere tutti i casi, ne' quali il problema ammette scioglimento; all' incontro delle due equazioni del Fontaine una ve n'ha di superflua, e che una applicazione fattane dall'autore è illusoria, e falsa. Di poi ribatte i vanti del signor Fontaine di avere il primo insegnato le condizioni, che rendono possibili le equazioni differenziali di 1.º grado a tre variabili, ed il teorema intorno alle funzioni nelle quali le variabili hanno in tutti i termini il medesimo

numero di dimensioni, trovandosi l'insegnamento primo nella Memoria di Nicola Bernoulli sulle trajettorie impressa in parte l'anno 1720 negli atti di Lipsia, ed in parte nel tomo VII dei supplementi comparso l'anno 1721; ed essendo stato adoperato il secondo dall'Eulero nella sua Meccanica venuta alla luce nel 1736. Alle quali cose però aggiugne di non negare, che il signor Fontaine abbia da se trovati gli accennati teoremi, e di essere ben persuaso che egli era al pari di qualsisia persona in stato di trovarli.

Se i fluidi resistono ai corpi per essi mossi, questi riagendo li mettono in movimento, ed eccoci con naturale progresso guidati a discorrere della teoria del Lagrange sul movimento dei fluidi. Singolari sono le equazioni differenziali di questo movimento, essendo a differenziali parziali, e sottilissimi sono i due artificj co' quali il Lagrange le stabilisce riguardo primieramente ai fluidi incompressibili, quale l'acqua, e giungono al numero di sette, le tre del movimento, quella della incompressibilità, quella della densità varia nei fluidi eterogenei, e le due derivate dalle equazioni delle pareti del vase, e dalla

superficie del fluido libera, sul supposto, che le particelle una volta nella superficie vi rimangano costantemente in tutto il movimento. L'integrazione generale di tutte queste equazioni a differenze parziali sorpassa le forze sino ad ora in tal materia acquistate dall'arte, ma risplende la industria del perspicacissimo analista in discernere i casi della integrabilità. Il primo caso si è quello in cui si uniscono le quattro condizioni, che la equazione della superficie del fluido libera non comprenda altra variabilità, che quella delle coordinate esprimenti le distanze delle particelle dai tre assi ortogonali; che il fluido sia omogeneo o sia di una densità uniforme, quale sarebbe l'acqua; che la somma dei prodotti delle forze secondo i tre assi ortogonali moltiplicate per i rispettivi spazietti sia una differenziale esatta, ciò che avviene sempre, allorchè le forze provengono da una o più attrazioni proporzionali a funzioni delle distanze dai centri, che è la legge di natura; che sia parimenti una differenziale esatta per un istante, poichè essendolo per un istante, viene ad esserlo per qualunque tempo, la somma dei prodotti delle velocità

secondo i tre assi ortogonali moltiplicate per gli spazietti relativi. Il difetto però di questa ultima equazione non toglie da se solo l'integrazione delle equazioni del movimento del fluido, anzi si scopre essere il movimento di un fluido ruotante intorno l'asse, che nella somma dei prodotti non entra, con una velocità regolare, e costante, d'onde si conchiude, che nel calcolo delle oscillazioni del mare non si può supporre, che la detta somma sia una differenziale esatta, non essendolo di fatto, allorchè il fluido è in riposo rapporto alla terra, e non ha che un movimento di rotazione con essa comune. Il secondo caso di molto esteso, si è quello, allorchè le velocità secondo i tre assi ortogonali sono piccolissime, nel qual caso si potranno facilmente determinare per un tempo qualunque le distanze di qualunque particella dai tre assi. Si renderà in fine più facile la risoluzione delle equazioni generali, se la massa del fluido sia tale, che una delle sue dimensioni sia assai più piccola delle altre due, e più facile ancora se due delle dimensioni abbiano tale piccolezza rispetto alla terza. E come schifando le difficoltà campeggia la sua de-

strezza nelle espressioni dei movimenti de' fluidi pesanti, ed omogenei nei vasi, o canali di qualunque figura, e nell' applicazione quinci di tali espressioni al movimento di un fluido, che cola in un vase stretto, e presso che verticale, distinguendo quattro casi, e quello di un vase di lunghezza indefinita, nel quale le particelle del fluido tanto nella inferiore, quanto nella superiore superficie restano costantemente le medesime; e quello di un vase di una determinata lunghezza, dal fondo del quale il fluido uscendo, si cangiano continuamente le particelle del fluido nella inferiore superficie; e quello di un vase di indefinita lunghezza, ma conservato sempre pieno, nel quale succede a rovescio, che nel caso testè esposto, cangiandosi le particelle fluide nella superficie superiore, e restando costantemente le stesse nell' inferiore; e quello di un vase di determinata lunghezza mantenuto costantemente pieno, nel quale le particelle si vanno rinnovellando in ambedue le superficie, è superiore, ed inferiore. Le soluzioni, supponendo la larghezza piccolissima rispetto alla lunghezza, e risultando conformi a quelle di

Daniello, e di Giovanni Bernoulli, e del D'Alembert nella ipotesi, che i differenti strati del fluido conservino nel discendere lungo il vase il loro paralellismo, si appalesa, che l'ipotesi non è esatta, che alloraquando la larghezza del vaso è piccolissima rispetto alla sua lunghezza. Ugualmente riluce la industria del nostro sagacissimo Analista nella indagine del movimento di un fluido contenuto in un canale poco profondo, e presso che orizzontale. Ritrovata la teoria generale delle piccole agitazioni di un fluido poco profondo ne rileva la vera teoria delle onde formate per i successivi piccolissimi innalzamenti, ed abbassamenti di un'acqua stagnante in un canale, o bacino poco profondo, e riflette essere assolutamente insufficiente la dottrina delle onde data dal Newton siccome fondata sulla supposizione precaria, e poco naturale, che le oscillazioni verticali delle onde si assomiglia a quelle dell'acqua in un tubo ricurvo. Nè a minore luce splende il suo ingegno nella sua Memoria, che qui aggiugner puoi sulla percussione de' fluidi perpendicolare, ed obbliqua, conciliatrice delle diverse teorie di Daniello Bernoulli, e del D'Alembert, e delle

differenti esperienze da una parte dello stesso Daniello Bernoulli, e del Bossut, dall' altra del Krafft, dimostrandovi che qualora la percussione è perpendicolare, che la lastra nella quale il fluido percuote è assai più grande della vena percuotente, e che le particelle del fluido scappano da essa in una direzione paralella, la forza della percussione riesce uguale ad una colonna di fluido di base uguale alla grossezza della vena, e di altezza doppia di quella dovuta alla velocità del fluido, come richieggono la teoria del Bernoulli, e le esperienze di esso e del Bossut; ma che scappando le particelle del fluido in una direzione obbliqua al piano, ciò che arriverà principalmente allorchè esso piano non sia di molto più grande che la larghezza della vena, allora l' altezza della colonna doppia di quella dovuta alla velocità del fluido sarà diminuita nella ragione dell' unità alla unità diminuita del seno dell' angolo, con cui le particelle del fluido scappano dal piano, il che serve a spiegare le esperienze del Krafft; onde apparisce che l' ipotesi dello scappamento delle particelle del fluido in direzione paralella al piano percosso reca al massimo la forza

di percussione; e dimostrando in seguito che qualora la percussione sia obbliqua la forza di essa è alla forza della percussione perpendicolare in ragione dell'angolo d'incidenza al seno totale; e che se il Bossut ha trovato nelle sue esperienze delle percussioni obblique una ragione minore si può spiegare tale discapito al modo stesso che si è fatto rispetto alle esperienze della percussione perpendicolare del Krafft. Avvertendo infine che a torto trasferirebbersi tali dimostrazioni al caso che il piano fosse esposto alla impulsione di una corrente, nella quale fosse interamente immerso, essendo stati vani, o ristretti a produrre alcune ricerche più o meno profonde, ma insufficienti gli sforzi sino ad ora usati per determinare *a priori* il valore di tale impulsione, ed avendo soltanto le reiterate esperienze provato, che essa impulsione è semplicemente eguale al peso di una colonna avente per base il piano battuto, e per altezza quella alla velocità del fluido dovuta. Dalle equazioni a differenze parziali del movimento dei fluidi incompressibili, tolto quanto appartiene alla condizione della incompressibilità, e sostituito ciò che viene com-

preso nella condizione della elasticità ricava il Lagrange le equazioni a differenze parziali del movimento de' fluidi elastici. E fatta astrazione dal calore, e da altre circostanze, per le quali può variare la elasticità indipendentemente dalla densità, e supposto, che per ragione di questa la elasticità varii in geometrica proporzione della varietà di essa, come la esperienza insegna avvenire nei fluidi elastici conosciuti, e principalmente nell'aria, la elasticità della quale è uguale al peso della colonna del mercurio nel barometro, od alla pressione della naturale atmosfera di densità in varia altezza varia, od al peso di una finta atmosfera omogenea, cioè in tutta l'altezza di di una densità uguale a quella della densità dell'atmosfera vera sul mare: poste, io dicea, tali cose, ne trae l'equazione del movimento delle piccolissime fibre dell'aria, la quale è quella stessa delle onde in un canale orizzontale, e poco profondo, corrispondendo le condensazioni dell' aria nelle sue fibrille alle elevazioni dell'acqua sopra il livello nelle onde, e l'altezza dell'atmosfera omogenea alla profondità dell'acqua nel canale: ciò che stabilisce una perfetta analogia tra le onde for-

mate nell' aria per le successive condensazioni, e rarefazioni, e le onde formate alla superficie dell'acqua tranquilla per le elevazioni, e gli abbassamenti successivi dell'acqua; analogia da varj autori supposta, ma da niuno mai dimostrata. L'equazione però delle onde dell'acqua, e delle onde dell'aria per due dimensioni orizzontali ad un tempo non si è potuto con le forze presenti dell'analisi integrare rigorosamente; bensì essa ammette facile integrazione ristretta al movimento in una sola linea retta, rendendosi simile a quella delle corde vibrantisi, e l' integrale completo comprende due importanti teorie, quella del suono dei flauti, e delle canne d' organo, e quella della propagazione del suono nell'aria libera, non trattandosi di altro, che di determinare convenientemente le due funzioni arbitrarie, delle quali il completo integrale è composto. Rispetto ai flauti, distinti tre casi, quello di un flauto aperto in ambedue le estremità; quello di un flauto in entrambe le estremità chiuso; e quello di un flauto in una estremità aperto, nell'altra chiuso, dimostra l' industriosissimo analista, che la durata di una oscillazione nei due primi casi

sarà eguale, e starà al tempo della caduta di un grave per la metà dell'altezza dell' atmosfera omogenea, come il doppio della lunghezza del flauto all' altezza dell' atmosfera omogenea intera; ma nel terzo caso la durata di una oscillazione sarà il doppio più lunga, ciò che viene dall' esperienza confermato nei giuochi d'organo chiamati Bordoni, che essendo otturati nella estremità loro superiore opposta alla bocca danno un tono di una ottava più basso, che se fossero aperti. Riguardo alla propagazione del suono in un'aria libera riflette con la sua acutezza aversi il caso delle agitazioni, o sia successive condensazioni, e rarefrazioni nelle fibrille dell'aria prodotte per i corpi sonori, considerando una linea sonora indefinita, che non sia da principio scossa, che in una piccolissima estensione; quinci determinate per i differenziali delle due funzioni arbitrarie dell'integrale le espressioni della velocità iniziale, e della iniziale condensazione per la detta piccolissima estensione, o fibrilla, di poi le velocità, e le condensazioni successive, e provate dopo qualunque tempo nulle per tutti i punti della indefinita linea, fuori di quelle che corri-

spondono alle ascisse uguali ad una quantità minore della piccolissima estensione iniziale accresciuta, o diminuita del prodotto del tempo nella radice del prodotto della gravità con l'altezza dell'atmosfera omogenea, spiega per l'espressione positiva, e negativa, che ne risulta di tali punti, come il suono si propaga da una parte, e dall altra del corpo sonoro, e si propaga in tempo uguale in piccolissime fibre sonore uguali tra loro in lunghezza, ed uguali alla piccolissima fibra iniziale; e come la propagazione di queste fibre venendo espressa dalla radice del prodotto della gravità nell'altezza dell'atmosfera omogenea, è costante, ed indipendente dalla scossa primitiva, e per conseguenza tutti i suoni forti, o deboli si propagano con una velocità sensibilmente uguale. Quanto al valore assoluto della velocità della propagazione ne segue, che essa deve uguagliarsi a quella che un corpo acquisterebbe cadendo da un'altezza uguale alla metà dell'altezza dell'atmosfera omogenea: d'onde attesa l'analogia tra le onde dell'acqua, e le onde dell'aria nel suono se ne trae che la velocità dell'onde nell'acqua uguaglia quella, che un corpo grave acqui-

sterebbe cadendo per una altezza uguale alla metà della piccola profondità del canale, dal che si coglie il reciproco dilettoso vantaggio di determinare dalla piccola profondità del canale la velocità dell'onde, e da questa la piccola profondità del canale: ma che dico la piccola profondità del canale? dicasi piuttosto la piccola profondità, a cui nell'ondeggiamento arriverà l'agitazione dell'acqua, che terrà luogo della piccola profondità del canale, laonde la reciproca determinazione si estenderà altresì alle grandi onde del mare. Ritornando alle piccolissime successive fibre sonore, se una fibra incontri un ostacolo immobile, ricavasi dall'equazione convenientemente maneggiata, che sarà come riflettuta, e retrocederà, ciò che fornisce la spiegazione ben naturale degli echi ordinarj, e dalla equazione medesima con simile artificio rilevasi, che ne nasceranno echi composti, supponendo, che la linea sonora sia terminata dai due lati da ostacoli immobili successivamente riflettenti, ed agitanti fibre sonore con nuove specie di oscillazioni continue.

Io certamente non avrò indovinato il pia-

no, nè l'ampiezza dell'opera esimia della Meccanica analitica dal Lagrange lasciata imperfetta; ma studiato mi sono di trasferire in essa, e compenetrare con più continuo ordine, che mi sia stato possibile, tutto ciò, che di Analitica Meccanica ha egli sparso nelle Memorie della Società di Torino, in quelle dell'Accademia di Berlino, in quelle dell'Accademia delle scienze di Parigi. E mi sembra che la sua Meccanica Analitica sia quel grande specchio di Archimede, imitato dal Buffon, composto di una moltitudine di specchi piani collegati a cerniera in modo di formare una curva parabolica, e riunire quinci in un foco tutte le immagini riflettute del Sole. Così la sua Meccanica Analitica raccoglie in un punto i lumi di tutte le dottrine da lui inventate, e qua e là insegnate, nè ciò soltanto, ma vi previene i lumi tutti, che in altro giorno su tale argomento si sarà per accendere, e spandere, strignendo in una equazione tutta sua per il congiungimento delle velocità virtuali, e delle forze acceleratrici tutti gli equilibri ed i movimenti tutti. E voi ora ditemi se a ragione io da principio lo celebrai quale Analista il più

Metafisico, e qual Artefice il più grande della Meccanica Analitica?

Nel resto qui non terminano le glorie del nostro Lagrange, avendo egli profondamente versato su di altri argomenti, e di Astronomia Pratica come sul passaggio di Venere sotto il Sole, e come sulle Refrazioni Astronomiche, e sulla soluzione di alcuni problemi di Astronomia sferica per mezzo delle serie, e sul modo di formare le tavole dei pianeti dietro le sole osservazioni; e di geografia sulla costruzione delle carte geografiche; e di ottica sulla teoria dei cannocchiali, e su di una legge generale di ottica. Ed in tutti questi argomenti spicca il genio del Lagrange. Spicca nella sua Memoria sul passaggio di Venere sotto il sole, prevenendo nel 1767 il passaggio dei 3 giugno 1769, coll'insegnare un metodo semplicissimo, e comodissimo per calcolare l'effetto, che le parallassi combinate di due astri devono produrre sulla distanza degli astri medesimi; per determinare in generale ne' passaggi dei pianeti attraverso il sole le parallassi d'ingresso, di uscita, di durata per tutti i paesi della terra; per dedurre da tre osservazioni fatte

in tre differenti luoghi la parallasse del sole indipendentemente dalla cognizione del movimento del pianeta, che vi passa sotto. Spicca nella Memoria delle Refrazioni Astronomiche, dove discussa, e provata non rigorosa, ma soltanto approssimante la regola dal De-Luc data per la correzione in conseguenza della variazione del calore da farsi nelle altezze determinate dalle osservazioni del barometro; nè punto fondata la credenza in cui pare essere stato il De-Luc medesimo, che la sua regola supponga la legge del diminuimento del calore dal basso all' alto dell' atmosfera in aritmetica progressione, risultandone quinci all' incontro la regola per il calore dell'acqua bollente a differenti altezze, tra il quale, ed il calore dell'aria non vi è per lo stesso De-Luc relazione veruna; dimostrata però la legge del calore decrescente dal basso all'alto in progressione aritmetica conducente nelle altezze delle montagne a risultamenti poco differenti da quelli, che provengono dalla formola dai fisici ricevuta, nella quale il calore è riguardato come costante; rifiutata siccome guidante a conchiusioni solamente precarie la legge im-

maginata dall'Eulero del calore decrescente in progressione armonica, ed in uno qualunque altra: entra a cercare la curva da un raggio descritta nell'attraversare l'atmosfera, e quindi a deteminare l'astronomica refrazione, e dopo sottili giri di calcolo riesce a determinarla sul fondamento di dati più esatti, e con una teoria meno incerta, che per lo avanti; ed accusa indi quali insussistenti, siccome contrarie alle osservazioni, ed alle esperienze del De-Luc, la espressione della rifrazione astronomica del Simpson supponente il diminuimento della densità dell'aria in progressione aritmetica, e quella del Bradley, che in fondo in essa ricade; e sopra quella del Mayer il quale avendo occultata la via, per cui vi si è condotto, ha chiuso il varco ad un esame *a priori* getta un sospetto, siccome sopra quella che di troppo si allontana dalla regola generale, secondo la quale la rifrazione è proporzionale alla tangente della distanza apparente dallo Zenith, allorchè tale distanza è minore di 70 gradi. Spicca nella Memoria su di alcuni problemi di Astronomia sferica sciolti per mezzo delle serie atteso il metodo nuovo, e semplicissimo di

esprimere con serie convergentissime la riduzione all' Ecclittica, od in generale la differenza tra la ipotenusa, e la base di un triangolo sferico rettangolo, essendo noto l'angolo compreso, ed atteso l'uso di tal metodo in più casi di triangoli sferici rettangoli, ed obliquangoli; ed in particolare attesa l'applicazione a determinare per l'angolo dell'Equatore colla Ecclittica, per la longitudine di un astro, e per la sua latitudine sì l' angolo di posizione, e sì la sua ascensione retta, e quinci la sua declinazione; ed atteso in fine il trasferimento del metodo stesso ad assegnare il valore di un angolo la cui tangente è data per il seno, e coseno di altro angolo. Spicca nella maniera di costruire le tavole dei pianeti dietro le osservazioni fondata sulla formola generale delle serie ricorrenti; sulla applicazione novella della teoria delle frazioni continue a ritrovarne il termine generale; sul rinvenire la frazione generatrice continuante all'indietro una serie ricorrente di conosciuta frazione generatrice; sul trasformare in una serie ricorrente di un ordine minore di una unità una serie data di ordine pari nascente da una frazione generatrice,

il denominatore della quale sia un polimonio reciproco di ordine pari, il numeratore un polimonio similmente pari, ma di un ordine di due unità minore; sul teorema, che una serie di cui ciascun termine sia la somma di un certo numero di seni di angoli varianti da un termine all' altro per costanti differenze qualunque, e ciascheduno moltiplicato per qualsivoglia costante coefficiente è una serie ricorrente; e sulla dimostrazione in fine, che qualunque sia lo sconcerto dai corpi celesti sofferto per la mutua loro attrazione, ed eziandio per cagione di un fluido rarissimo, in cui nuotassero, li movimenti loro in tempi uguali saranno da tali serie rappresentati con parecchi esempi illustranti la teoria, con metodi quanto semplici, tanto comodi per disimbarazzarsi dalle equazioni secolari crescenti in ragione quadrata dei tempi, con dottrine utilissime nella fisica a scoprire la legge dei fenomeni dietro i risultamenti di diverse esperienze, e generalmente in quistioni delle quali senza il soccorso di esse non si potrebbe, che a tastone venirne a capo. Spicca nelle due Memorie sulla costruzione delle carte geografiche, nel-

la prima delle quali riferita la sottile idea del Lambert, da esso prima, poi dall'Eulero compiuta, di determinare le linee dei meridiani, e dei paralleli con la condizione, che tutti gli angoli fatti nel piano della carta sieno uguali agli angoli corrispondenti sulla superficie del globo, ma con essersi gli illustri autori contentati, che le teorie conosciute dalla projezione stereografica, e delle carte marine ridotte sieno rinchiuse in tale risoluzione, si accigne egli alla ricerca ugualmente interessante per gli artificj, che addomanda, e per l'utilità, che può recare nel perfezionamento delle geografiche carte, e da niuno mai intrapresa, di sviluppare l'accennata idea di modo, che lo sviluppo comprenda i casi tutti, ne' quali per i meridiani, e per i paralleli riescano cerchi. E richiamato il problema a due equazioni differenziali, e la integrazione loro a due funzioni arbitrarie, e modificate convenientemente tali funzioni, perviene a risolvere in generale maniera il problema, di cui la projezione stereografica non porge, che una risoluzione particolare, abbracciando all'incontro egli senza limite tutte le maniere possibili di soddisfare

alle due condizioni, 1.ª che ciascuna parte della superficie della terra, sia sferica, o sferoidica con piccolo schiacciamento ai poli, la sua figura, abbia sulla carta una figura simile, e solamente nella grandezza alterata, che sul globo; 2.ª che tutti i meridiani, ed i paralleli tutti della terra sieno sulla carta rappresentati per cerchj. E ben leggiadre le conseguenze, che dalle sue generali espressioni deduce nella seconda Memoria: quale che fatto, quello che egli chiama esponente della projezione, uguale a zero, si ha il caso delle carte marine ridotte, dove i meridiani ed i paralelli sono rappresentati per linee rette; e che per l'opposto si ha la projezione stereografica posto lo stesso esponente uguale all'unità, e che nella projezione stereografica l'alteramento delle grandezze dei paesi sarà minimo, allorchè il centro della carta sarà nel punto la cui longitudine sia quella dell'occhio, e la distanza dal polo uguale a 180 gradi meno la distanza del polo stesso dall'occhio; e che del resto l'alteramento delle regioni circonvicine sarà il minore possibile, e conserveranno presso a poco la forma loro naturale in una carta, nella qua-

le il principal luogo di data longitudine, e di data latitudine sia presso a poco nel mezzo della carta, e la projezione abbia l'esponente uguale alla radice dell'unità accresciuta del seno nel complemento della latitudine stessa. Spicca nelle due Memorie di Ottica, nella prima della teoria dei cannocchiali piantando una serie ricorrente di secondo ordine, i cui termini pari sono proporzionali alle aperture delle lenti, ed i dispari alle tangenti degli angoli, che il raggio luminoso fa con l'asse ai primi fuochi loro, ed i pari per i dispari divisi determinano le distanze dei fuochi conjugati delle lenti da' loro centri. Quinci il teorema di Cotes della distanza di un oggetto veduto attraverso di un numero qualunque di lenti, e quinci le quantità che l'Eulero chiamò *raisons des ouvertures*, ragioni delle aperture. Quinci la determinazione della condizione fondamentale di ogni cannocchiale; l'espressione dell'amplificazione; quella della chiarezza apparente all'amplificazione proporzionale. Quinci la situazione o diritta o rovescia dell'oggetto: e quinci il campo apparente uguale all'angolo del raggio luminoso con l'asse al primo foco della

prima lente, purchè l'occhio sia posto nel secondo fuoco conjugato del cannocchiale: con la distinzione di varj casi, e del caso quando l'apertura dell'obbiettivo non influirà punto, restando il campo apparente medesimamente uguale al sopraddetto angolo, ancorchè l'apertura dell'obbiettivo si riducesse ad un punto, caso che comprende quello dei cannocchiali a vetri convessi; ed il caso nel quale in qualunque luogo si ponga l'occhio il campo apparente dipende dall'apertura dell'obbiettivo; ed il caso in cui il campo cresce diminuendo la distanza dell'occhio dal cannocchiale, e diviene massima, in proporzione però sempre coll'apertura dell'obbiettivo, applicando l'occhio contro l'oculare, che è il caso dei cannocchiali del Galileo a due lenti l'una convessa, l'altra concava. E spicca nella sua seconda Memoria di Ottica, che presenta una nuova generale legge di ottica, cui egli deduce dalle sue formole generali, e la conseguenza della quale si è già superiormente accennata nella proporzionalità della chiarezza all'amplificazione. Questa legge generale si è, che in telescopio, o microscopio qualunque, sia qual

si voglia il numero, la disposizione, la forza delle lenti, o degli specchj, l'aumento dei diametri, che costituisce l'ingrossamento per l'istromento prodotto è sempre nel rapporto del diametro dell'apertura dell'obbiettivo al diametro dell'apertura dell'oculare, intendendo per questa apertura la sezione del cilindro luminoso che esce dall'oculare, e supponendo che il fascio di luce dall'oggetto mandato all'obbiettivo non sia punto intercettato nel suo tragitto, e possa tutto intero uscire dall'oculare. E siccome è facilissimo il misurare il diametro dell'apertura dell'obbiettivo, così non essendo difficile il misurare il diametro del cilindro luminoso uscente dall'oculare, ricevendo questo luminoso cilindro su di un cartone perpendicolare all'asse del telescopio diretto al sole, od all'asse del microscopio illuminato da una candela alquanto lontana per un piccolissimo foro, ecco per la nuova legge facilmente conosciuto l'ingrandimento cagionato da un telescopio, o microscopio senza punto conoscerne la struttura; come in meccanica conoscendo per la legge delle velocità virtuali il rapporto delle velocità insieme del punto

a cui sono applicate le forze, e del punto a cui le forze sono per la macchina trasmesse, si conosce l'aumento delle forze dalla macchina prodotto senza punto conoscerne la natura, e la costruzione. Ed una conseguenza assai importante di tal legge si è, che prescindendo dalla perdita di luce avvegnente nell' attraversamento delle lenti, o nella riflessione dagli specchj, l'oggetto per un istromento qualunque di ottica si deve vedere ugualmente chiaro e brillante, che direttamente ad occhio nudo; crescendo per l' istromento il lume di tanto in densità, di quanto la superficie veduta cresce in ampiezza; sopra cui devesi riportarlo diffuso. Laonde s'ingannano quegli ottici, che nei telescopj, e microscopj stabiliscono la chiarezza in ragione dell'apertura dell'obbiettivo, ed inversa dell'amplificamento della superficie dell'oggetto, e tornerà cosa molto utile l'avere tolto questo inganno.

Mi resta brevemente a dire dell' indole sua morale: egregia indole, amante del vero, dell' incertezza nimica, abborrente le quistioni, costantemente tranquilla, lontana dall' arroganza, anzi frequentemente, ed a tutto grado prorompente alla confessione: io non

so, ilare, ma dignitosa, franca ma modesta, sensibile ma ritenuta, sincera ma non urtante, parca di parole ma sentenziosa, semplice nel vivere quanto nel pensare sublime, sollecita verso le mogli quanto poco curante dei suoi lavori, aliena dall'ambizione degli onori quanto di essi meritevole. E fu ben grande onore per lui, e non minore per la Francia l'averlo l'anno 1788 con generoso stipendio accolto da Berlino partito, e di avergli nella furia stessa della rivoluzione con decreto speciale lo stipendio confermato. Ed uguale per esso lui e per il Massimo NAPOLEONE onore fu di poi l'essere il superiore suo merito riconosciuto con i gradi di Professore nelle scuole Politecniche, e di membro dell'imperiale Istituto francese, e dell'ufficio delle Longitudini, con la dignità di Senatore, e gli Stemmi di Grande Dignitario della Legione di onore, e di Gran-Croce dell'ordine della Riunione. Il Lagrange, l'analista il più metafisico, l'istitutore più insigne della Meccanica analitica, grande gloria d'Italia, sarà grande nel tempio della immortalità, dove, ad onta del colpo sopra lui vibrato dalla morte li 10 aprile del corrente

anno 1813, viverà in eterno adorno la fronte di una corona, che di otto giri composta porterà in essi distributivamente scritte, la equazione dimostrante la necessità delle funzioni arbitrarie discontinue; quella de' massimi e minimi ordinarj, ed alti; quella dell'analisi indeterminata; quella delle soluzioni singolari ornata di una curva abbracciante una infinita famiglia di curve; quella delle differenze tra le radici di una equazione numerica data; quella risolvente di una equazione letterale delle ignote sue radici formata; quella dello sviluppo di una funzione tramutante in funzioni derivate, e primitiva i calcoli degli infinitamente piccoli, e degli integrali loro; quella immensa della meccanica analitica comprendente gli equilibri, ed i movimenti tutti.

E Voi, o Sire, o primo eccelso Genio onorante l'italica regione, primo Monarca, primo Guerriero, primo Legislatore, primo Mecenate, o Massimo NAPOLEONE, vincete col terrore di vostra singolare marzial arte, e con la più ancora singolare generosità del vostro animo i vostri nemici, traendoli ad una pace sincera, e stabile, per cui si conducano a

compimento le vostre intenzioni, le vostre brame, le cure vostre, che fiorisca il commercio, che si aggiunga lena all' agricoltura, che si perfezionino le belle arti, che si rechino ad esperimentale evidenza, ed a teorica sublimità le scienze. E cinto le tempia di aureo gemmato diadema, nel quale sopra le prodigiose vostre militari imprese da maestra mano scolpite splenda in finissimi smeraldi un ramo di sempre verde ulivo, sederete nell' universo politico qual Sole da altri scettrati coronato, fonte loro di luce, e delle loro forze, e movimenti centro. Ed a fianco Vi sederà l' inclito EUGENIO vostro ben degno adottivo figlio, a Voi fedele in sostenere da forte la strana rigidezza della cruda stagione, in custodire contro l' impervérsante violenza di essa la più avventurosa parte de' valorosi vostri soldati, in proteggere con la guernigione delle più importanti piazze le vostre conquiste; ed a noi provvido in governare a nome vostro con somma sapienza e sollecitudine, fatto in amore italiano, l' italico regno.

MEMORIE

DI LUIGI LAGRANGE

1. Lettera il 23 luglio del 1754 indirizzata al celebre Giulio Carlo di Fagnano contenente una serie per li differenziali, e gli integrali di un grado qualunque corrispondente alla Newtoniana per le potenze, e le radici. Impressa in Torino.

MEMORIE

Contenute nei tomi della Società Privata, poi Accademia Reale, presentemente Imperiale di Torino.

Tomo I delle Miscellanee anno 1759.

1. Ricerche sul metodo dei massimi, e dei minimi.
2. Sulla integrazione di una equazione differenziale a differenze finite, che contiene la teoria delle serie ricorrenti.
3. Ricerche sulla natura, e propagazione del suono.

Tomo II per gli anni 1760, 1761.

4. Nuove ricerche sulla natura, e propagazione del suono.
5. Saggio di un nuovo metodo per determinare i massimi, e minimi delle formole integrali indefinite.
6. Applicazione del metodo precedente allo scioglimento di più problemi di Dinamica.

7. Addizione alla prima parte delle Ricerche sulla natura, e propagazione del suono impresse nel volume precedente.

Tomo III. per gli anni 1762, 1765.

8. Soluzione di più problemi di calcolo integrale con l'applicazione a vari articoli di Dinamica appartenenti sì a solidi, che a fluidi.

Tomo IV per gli anni 1766, 1769.

9. Soluzione di un problema Aritmetico.
10. Sulla integrazione di alcune equazioni differenziali, le indeterminate delle quali sono separate, ma delle quali ciascuno membro in particolare non è integrabile.
11. Sul metodo delle variazioni.
12. Sul movimento di un corpo attirato verso due centri fissi.
13. Sullo stesso argomento.

Tomo V. per gli anni 1770, 1773.

14. Sulla figura delle colonne.
15. Sulla utilità del metodo di prendere il medio tra li risultamenti di più osservazioni, esaminando gli avantaggi di questo metôdo nel Calcolo delle probabilità dove si sciolgono più problemi a questa materia relativi.

Parte Prima del tomo delle Memorie per gli anni 1784, 1785.

16. Sulla percussione dei fluidi.

Parte Seconda.

17. Sopra un nuovo metodo di calcolo integrale per i differenziali contenenti un radicale quadrato sotto 'l quale la variabile non passa il quarto grado.

MEMORIE

Nell'Accademia di Berlino.

Tomo per l'anno 1765.

1. Sulle curve Tautocrone.

Tomo per l'anno 1766.

2. Sul passaggio di Venere del 3 giugno 1769.

Tomo per l'anno 1767.

3. Soluzione dei Problemi indeterminati del secondo grado.
4. Risoluzione delle equazioni numeriche.

Tomo per l'anno 1768.

5. Addizione alla risoluzione delle equazioni numeriche.
6. Nuovo metodo su i problemi indeterminati in numeri interi.
7. Nuovo metodo per risolvere le equazioni litterali per mezzo delle serie.

Tomo per l'anno. 1769.

8. Sulla forza degli elastri piegati.
9. Sul problema di Keplero.
10. Sulla eliminazione delle incognite dalle equazioni.

Tomo per l'anno 1770.

11. Nuove riflessioni sulle Tautocrone.
12. Dimostrazione di un teorema di Aritmetica.
13. Riflessioni sulla risoluzione algebrica delle equazioni

Tomo per l'anno 1771.

14. Dimostrazione di un nuovo teorema su i numeri primi.
15. Seguito delle riflessioni sulla soluzione algebrica delle equazioni.

Tomo per l'anno 1772.

16. Nuova specie di calcolo relativo alla differen-

ziazione, ed alla integrazione delle quantità variabili.

17. Sulla forma delle radici immaginarie delle equazioni.

18. Sulle Refrazioni Astronomiche.

19. Sulla integrazione delle equazioni a differenze parziali del primo ordine.

Tomo per l'anno 1773.

20. Nuova soluzione del problema di rotazione di un corpo di figura qualunque non animato da alcuna forza acceleratrice.

21. Sulla attrazione delle sferoidi elittiche.

22. Soluzioni analitiche di alcuni problemi sulle piramidi triangolari.

23. Ricerche di Aritmetica.

Tomo per l'anno 1774.

24. Sulli integrali particolari delle equazioni differenziali.

25. Sul movimento dei nodi delle orbite planetarie.

Tomo per l'anno 1775.

26. Ricerche sulle serie i cui termini variano in più maniere differenti, o sulla integrazione delle equazioni lineari a differenze parziali, e sull'uso di queste equazioni nella teoria degli azzardi.

27. Addizione alla Memoria sulla attrazione delle sferoidi elittiche.

28. Seguito delle ricerche di Aritmetica.

Tomo per l'anno 1776.

29. Sulla alterazione dei medii movimenti de' pianeti.

30. Sull'uso delle frazioni continue nel calcolo integrale.

31. Soluzione di alcuni problemi di Astronomia sferica per mezzo delle serie.

Tomo per l'anno 1777.

32. Ricerche sulla determinazione del numero delle radici immaginarie nelle equazioni litterali.

33. Su alcuni problemi dell'analisi di Diofanto.

34. Rimarche generali sul movimento di più corpi attraentisi in ragione quadrata inversa delle distanze.

35. Riflessioni sullo scappamento negli orologi.

Tomo per l'anno 1778.

36. Sulla determinazione delle orbite delle comete per mezzo di tre osservazioni.

37. Sullo stesso argomento.

38. Sulla teoria dei cannocchiali.

39. Su d'una maniera particolare di esprimere il tempo nelle sezioni coniche descritte per forze tendenti ad un fuoco, e reciprocamente proporzionali ai quadrati delle distanze.

Tomo per l'anno 1779.

40. Sopra differenti questioni relative alla teoria degli integrali particolari.

41. Sulla costruzione delle carte geografiche.

Tomo per l'anno 1780.

42. Teoria della librazione della luna, e di altri fenomeni dipendenti dalla figura non sferica di essa.

Tomo per l'anno 1781.

43. Rapporto di una quadratura del cerchio - nella storia.

44. Sulla teoria del movimento dei fluidi.

45. Teoria delle variazioni secolari degli elementi dei

pianeti, prima parte contenenti i principj e le formole generali per determinare queste variazioni.

Tomo per l'anno 1782.

46. Rapporto di una Memoria intitolata: metodo per conoscere se la terra sia schiacciata ai poli, e rilevata all'equatore - nella storia.
47. Teoria delle variazioni secolari dei pianeti. Seconda Parte.

Tomo per l'anno 1783.

48. Teoria delle variazioni periodiche dei pianeti. Prima Parte contenente le formole generali di queste variazioni.
49. Sulle variazioni secolari dei movimenti medii dei pianeti.
50. Sulla maniera di rettificare i metodi ordinarj di approssimazione nella integrazione delle equazioni del movimento de' pianeti.
51. Sopra un metodo particolare di approssimazione, e d' interpolazione.
52. Sopra una nuova proprietà del centro di gravità.
53. Memoria terza sulla determinazione delle orbite delle comete, nella quale si dà una soluzione diretta, e generale del problema.

Tomo per l'anno 1784.

54. Teoria delle variazioni periodiche del movimento dei pianeti. Seconda Parte contenente il calcolo delle variazioni periodiche indipendenti dalle eccentricità, e dalle inclinazioni relativamente ai sei pianeti principali.

Tomo per l'anno 1785.

55. Metodo generale per integrare le equazioni a dif-

ferenze parziali di primo ordine, allorchè queste differenze non sono, che lineari.

Tomo per l'anno 1786.

56. Teoria geometrica del movimento degli Afelj dei pianeti per servire di addizione ai principj del Newton.
57. Maniera di rettificare due luoghi dei principj del Newton relativi alla propagazione del suono, ed al movimento delle onde.

Tomo per gli anni 1792, 1793.

58. Sopra una questione concernente le annuità.
59. Sulla espressione del termine generale delle sèrie ricorrenti allorchè l'equazione generale ha radici uguali.
60. Addizione alla teoria delle attrazioni delle sferoidi elittiche.
61. Addizione sul metodo d'interpolazione.
62. Sulla equazione secolare della Luna.

Tomo per l'anno 1803.

63. Sopra una legge generale di Ottica.

RACCOLTA

Delle Pezze che hanno riportato i premj dall'Accademia delle scienze di Parigi.

Tomo IX contenente le pezze degli anni 1764, 1766, 1770, 1772.

1. L'anno 1764 Ricerche sulla librazione della Luna.
2. L'anno 1766 Sulle disuguaglianze dei movimenti dei satelliti di Giove.
3. L'anno 1772 Sopra il problema dei tre corpi.

CONTINUAZIONE

Delle Pezze premiate col titolo più esteso di Memorie presentate.

4. L'anno 1773 Sopra l'equazione secolare della Luna.

5. Tom. X Premio doppio per l'anno 1780 sulle perturbazioni delle comete.

Istoria dell'Accademia Reale delle scienze di Parigi.

1. L'anno 1772 Ricerche sulla maniera di formare le tavole dei pianeti dietro le sole osservazioni.
2. l'anno 1774 Ricerche sulle equazioni secolari dei movimenti dei Nodi, e delle inclinazioni delle Orbite dei Pianeti.

MEMORIE

Dell' Istituto di Francia, anno 1808.

1. Memoria sulla teoria delle variazìoni degli elementi dei pianeti, ed in particolare delle variazioni dei grandi assi delle orbite loro.
2. Sulla teoria generale della variazione delle costanti arbitrarie in tutti i problemi della meccanica.
3. Supplemento alla Memoria precedente.

GIORNALE

Della scuola Politecnica.

1. Quaderno quinto del tomo II. Saggio di analisi numerica sopra la trasformazione delle frazioni.
2. Sul principio delle velocità virtuali.
3. Quaderno sesto dello stesso tomo II. Discorso sull'oggetto della teoria delle funzioni analitiche.
4. Soluzione di alcuni problemi relativi ai triangoli sferici, con una analisi completa dei medesimi.
5. Quaderno quintodecimo del tomo VIII. Schiarimento di una difficoltà singolare, che si riscontra nel calcolo dell'attrazione delle sferoidi poco differenti da una sfera.

SEDUTE

Delle Scuole Normali di Parigi.

1. Tomo I. Programma di Lagrange, e La-Place.

2. Dibattimenti del tomo I. Dibattimento tra Lagrange, La-Place, ed altri sulla storia dell' aritmetica in genere, sulla prima Parte teorica dell'aritmetica fondata sul sistema decimale, e sulla maniera di collocare le cifre per far loro esprimere i differenti numeri.
3. Sulla seconda Parte dell' aritmetica indipendente dal sistema di numerazione, e solo considerante le proprietà generali dei numeri.
4. Tomo III. Sulla importanza dell'aritmetica, siccome non solo fondamento, ma eziandio complemento di tutte le scienze, giusta quel detto antico, che l'aritmetica, e la geometria sono le ali delle matematiche.
5. Sull' Algebra sino alle equazioni di 4. grado istoricamente e teoricamente.
6. Sulle equazioni al 4. grado superiori dimostrando le proprietà loro generali per mezzo delle curve.
7. Tomo IV. Sull'applicazione dell'Algebra alla Geometria, e risoluzione delle equazioni, considerandole come ordinate nulle alle curve.

OPERE DEL LAGRANGE

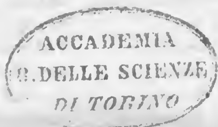
1. L'anno 1774. Analisi indeterminata serviente di addizioni a quella di Eulero nel secondo tomo de' suoi elementi.
2. L'anno 1788. Meccanica Analitica in un solo volume.
3. La stessa aumentata di molto dall' autore in più volumi, de' quali uno solo vide la luce l'anno 1811.
4. Anno V della Repubblica francese. Teoria delle funzioni analitiche divisa in due parti, la prima

delle quali è l'esposizione pura della teoria, la seconda l'applicazione di esso alla Meccanica.

Trovasi la prima Parte distribuita in 22 lezioni, ed aumentata nel tomo X delle sedute delle scuole Normali; nel Giornale Politecnico tomo V, e tomo VII; e stampata a parte l'anno 1806.

5. La risoluzione delle equazioni numeriche di tutti i gradi. Anno VI della Repubblica francese; ristampata con aumento l'anno 1808.

ERRORI		CORREZIONI
Pag. 4	lin. 8 - 9 anailsta	analista
	lin. 16-17 giustificherà	giustificheranno
» 23	lin. 24 libero dell'	libero dall'
» 25	lin. 8 ampliarli, ed	ampliarli ad
» 40	lin. 26 nna	una
» 41	lin. 7 Ischirnaus	Tschirnaus
» 43	lin. 14 sospingesi	sospingasi
» 49	lin. 3 Kerschel	Herschel
» 65	lin. 6 dirtruggersi	distruggersi
» 85	lin. 4 del D'Alembert	dal D'Alembert
» 123	lin. 9 dalla	della
» 125	lin. 4 nel	del
	lin. 24 oggetto:	oggetto;
» 128	lin. 14 ampiezza;	ampiezza,



Nell'anno IX del Regno di Napoleone il Grande
fu dato principio a questa edizione
il giorno XVII del mese di giugno
ed il XXX di esso mese fu compiuta.

